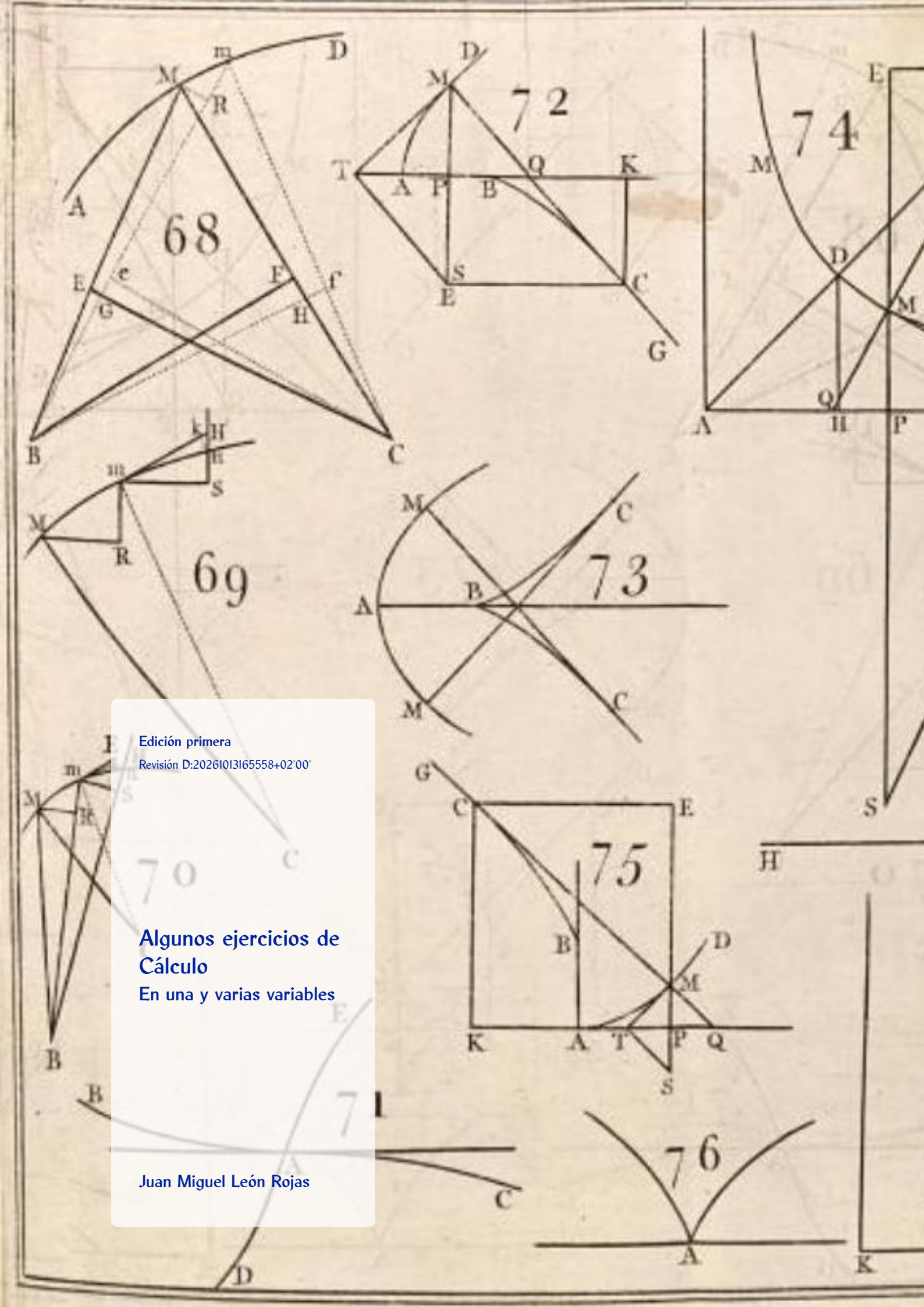


Edición primera

Revisión D:20261013165558+02'00'

Algunos ejercicios de Cálculo

En una y varias variables

Juan Miguel León Rojas

Algunos ejercicios de Cálculo

Índice general

Prólogo 1

I Los ejercicios 3

0. Cimientos 5
0.0. Rectas . . . 5
0.1. Números naturales, enteros, racionales y reales. Reducción al absurdo . . . 7
0.2. Más sobre la reducción al absurdo . . . 10
0.3. Relaciones y funciones . . . 12
0.3.0. Relaciones y sus representaciones . . . 12
0.3.1. Correspondencias, funciones y aplicaciones . . . 14
0.3.2. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad . . . 15
0.3.3. Composición de funciones . . . 15
0.3.4. Inversa o recíproca . . . 16
0.3.5. Ejercicios resueltos . . . 17
0.4. Cardinalidad . . . 18
0.4.0. Lo equipotente . . . 18
0.4.1. Lo numerable . . . 19
0.4.2. Lo continuo . . . 19
0.4.3. Ejercicios resueltos . . . 20
0.5. Espacios métricos y algunos conceptos topológicos . . . 21
0.5.0. Distancia, espacio métrico y subespacio . . . 21
0.5.1. Bolas y esferas; conjuntos convexos . . . 23
0.5.2. Algunas distancias en el plano real . . . 23
0.5.3. Separación entre conjuntos y acotación . . . 25
0.5.4. Espacio métrico producto. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ . . . 26
0.5.5. Conjuntos abiertos y cerrados. Entornos. . . . 27
0.5.6. Puntos interiores, exteriores y frontera. . . . 29
0.5.7. Adherencia de un conjunto . . . 32
0.5.8. Puntos de acumulación y aislados . . . 34
0.5.9. Efectividad en la clasificación de los puntos . . . 39
0.5.10. Ejercicios resueltos . . . 40
0.6. Modelización con funciones . . . 53
0.7. Espacio topológico. Continuidad y límite puntual . . . 56
0.7.0. Espacio topológico . . . 56
0.7.1. Continuidad puntual de una función . . . 56
0.7.2. Límite puntual de una función . . . 56
0.8. Continuidad y límite puntual en espacios métricos . . . 56
0.8.0. Continuidad puntual de una función . . . 57
0.8.1. Límite puntual de una función . . . 57

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

1. Modelos en una variable: funciones $f : (\mathbb{R}, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_2)$ 59
1.0. Límites y continuidad . . . 59
1.0.0. Límite puntual de una función . . . 59
1.0.1. Límites laterales . . . 60
1.0.2. Límites infinitos y en el infinito . . . 61
1.0.3. Indeterminaciones . . . 62
1.0.4. Infinitésimos . . . 63
1.0.5. Continuidad . . . 63
1.0.6. Discontinuidad . . . 64
1.0.7. Continuidad lateral . . . 64
1.0.8. Ejercicios resueltos . . . 65
1.0.9. Apéndice . . . 69
1.1. Teoremas de valores intermedios de continuidad . . . 70
1.1.0. Ejercicios resueltos . . . 71
1.2. Derivabilidad . . . 75
1.2.0. Derivada puntual de una función . . . 75
1.2.1. Interpretación geométrica de la derivada puntual . . . 75
1.2.2. Función derivada . . . 75
1.2.3. Derivadas laterales . . . 76
1.2.4. Continuidad y derivabilidad . . . 76
1.2.5. Cálculo de derivadas . . . 77
1.2.6. Ejercicios resueltos . . . 80
1.3. Teoremas de valores intermedios de derivabilidad . . . 82
1.3.0. Ejercicios resueltos . . . 84
1.4. Crecimiento, extremos locales, concavidad y optimización . . . 88
1.5. Función primitiva, integral indefinida y su cálculo . . . 92
1.6. Teoremas de integración definida . . . 94
1.7. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes por integración . . . 97
1.7.0. Longitudes . . . 97
1.7.1. Áreas por secciones paralelas de longitud conocida . . . 97
1.7.2. Volúmenes por secciones paralelas de área conocida . . . 99
1.7.3. Áreas por franjas . . . 101
1.7.4. Volúmenes de sólidos de revolución . . . 106
1.7.5. Apéndice . . . 111

2. Modelos en varias variables: funciones $\vec{f} : (\mathbb{R}^n, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_2)$ 117
2.0. Preliminares algebraicos, métricos y topológicos . . . 117
2.1. Campo escalar y campo vectorial. Dominio e imagen . . . 119
2.2. Límite de un campo vectorial . . . 122
2.3. Límites reiterados . . . 123
2.3.0. Ejercicios resueltos . . . 124
2.4. Límites direccionales . . . 124
2.4.0. Ejercicios resueltos . . . 127
2.5. Continuidad . . . 129
2.5.0. Ejercicios resueltos . . . 132
2.6. Derivadas direccionales . . . 135
2.6.0. Ejercicios resueltos . . . 136
2.7. Derivadas parciales, derivabilidad . . . 137
2.7.0. Ejercicios resueltos . . . 140
2.8. Derivadas parciales sucesivas . . . 143
2.9. Diferenciabilidad de un campo vectorial . . . 146
2.9.0. Ejercicios resueltos . . . 148

Versión: D:20261013165558+02'00' ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

2.10. Optimización con restricciones de igualdad, por sustitución directa: extremos para campos escalares . . . 149
2.10.0. Ejercicios resueltos . . . 151
2.11. Optimización con restricciones de igualdad, por el método de los multiplicadores de Lagrange (ML) . . . 153
2.11.0. ML(n,1). Problema con n variables y una condición . . . 153
2.11.1. ML(n,m). Problema con n variables y m condiciones ($m < n$) . . . 154
2.11.2. Ejercicios resueltos . . . 156
2.12. Cálculo de áreas y volúmenes por integración doble . . . 158
2.12.0. Integración doble en rectángulos . . . 158
2.12.1. Integración doble en recintos acotados particulares (no rectángulos) . . . 159
2.12.2. Interpretación geométrica . . . 160
2.12.3. Ejercicios resueltos . . . 161
2.13. Un vistazo al cálculo de volúmenes por integración triple . . . 163
2.13.0. Integración triple en ortoedros . . . 163
2.13.1. Integración triple en recintos acotados particulares (no ortoedros) . . . 163
2.13.2. Interpretación geométrica como volumen . . . 164
2.13.3. Ejercicios resueltos . . . 165

II Algunas prácticas con Sage (y con apoyo ocasional de Wolfram|Alpha) 167

3. Práctica CERO 169

4. Práctica UNO 175

5. Práctica DOS 185

6. Práctica TRES 191

7. Práctica CUATRO 195

III Histórico de exámenes 199
EPP 11.11.2024 . . . 201
EPS 19.12.2024 . . . 203
EFO 21.1.2025 . . . 205
EFE 22.5.2025 . . . 208
EFE 20.6.2025 . . . 211
EPP 10.11.2025 . . . 214
EPS 18.12.2025 . . . 216
EFO 9.1.2026 . . . 218
EFE 17.6.2026 . . . 221

IV Adendas 225
Bibliografía . . . 227
Esencial . . . 227
Complementaria . . . 227
De aplicación específica a edificación . . . 228
Recursos . . . 228
Programables . . . 228
No programables . . . 228
Comunicación y almacenamiento seguro . . . 228

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

IA 228
Aula de Humanidades Juanelo Turriano (III.ª edición) 229
Exordio 229
A modo de prólogo 231
A modo de ejemplo 231
CERO: Filosofía de la Técnica y de la Tecnología 231
UNO: Ciencia, Tecnología y Sociedad 232
DOS: Imagen del Ser Humano 233
TRES: Multiculturalismo y Globalización 233
CUATRO: Ética y Valor Humano 234
CINCO: Evolución 234
A continuación 235
Para no finalizar 235

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Prólogo

Ésta es una compilación de ejercicios junto a unos esquemas de resolución, y algunas muy breves notas teóricas dispersas junto a algunos ejemplos, también éstos con sus esquemas de resolución. Su conjunto tiene como meta contribuir a formar una base sólida vía la práctica intensa.

Las imágenes de la portada y la contraportada son parte de la *Plate 6* de *The Method of Fluxions, both Direct and Inverse* (1730) traducido por Edmund Stone del *Analyse des infiniment petits* de Guillaume de l'Hôpital[1].

He hecho cuanto estaba en mi mano para asegurar no haber infringido el derecho de autoría de nadie; quedaré muy agradecido ante toda información que pudiese ayudarme a hacer un reconocimiento de autoría correcto; igualmente ante cualquier comunicación de erratas o errores o toda sugerencia[2].

Utilizo indistintamente numeraciones según los naturales y según los enteros positivos.

Algunas abreviaturas son:

CEOV	cuestión cuya entrega resuelta fue optativa y voluntaria.
Cubit	cuaderno de bitácora.
EFE	examen final extraordinario.
EFEC	examen final extraordinario para coincidencias.
EFO	examen final ordinario.
EPP	examen parcial primero.
EPS	examen parcial segundo.

Como adenda incluyo el Aula de Humanidades Juanelo Turriano (en su tercera edición), en la que nos sumergimos en las humanidades, disciplinas que debiesen acompañar a toda persona científica o ingeniera, y en la que propongo la lectura de un conjunto de libros, incidiendo en temas como el uso y el impacto recíproco de la ciencia y la tecnología en la sociedad desde el punto de vista humanístico; dicha lectura se divide en seis bloques temáticos: Filosofía de la Técnica y de la Tecnología; Ciencia, Tecnología y Sociedad; Imagen del Ser Humano; Multiculturalismo y Globalización; Ética y Valor Humano; Evolución. Lectura que, como seguramente sientas interés, inquietud o preocupación por estos temas, te acompañará unos años.

No está de más una advertencia o indicación de precaución: se requieren condiciones especiales de conservación de lo aprendido contra todo paralogismo, sofisma o manipulación.

¡Mente avizora!

Esta revisión de la presente edición es la D:20261013165558+02'00'; la última revisión está disponible en la RUD (red universal digital)[3].

Esta edición está aún en construcción.

[4].

[1] *Vid.* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Method_of_Fluxions_(1730)_Plate_6.jpg.
[2] jmleonrojas@protonmail.com
[3] Por ejemplo, en Internet Archive: https://archive.org/details/leon-rojas-j.-m.-2025-algunos-ejercicios-de-calculo.
[4] Algunos documentos de los que he publicado, sobre diversas materias, están disponibles en

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

https://archive.org/details/@juan_miguel_leon_rojas.

Parte I

Los ejercicios

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Dedicamos esta parte a *algunas, sólo algunas, de las cuestiones resueltas o propuestas como ejercicios en el cuaderno de bitácora* —de ahí lo de nombrarlos Cubit—, diario de impartición en los años académicos 2024–2025, 2025–2026 y 2026–2027 de la asignatura Cálculo para la Edificación en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura. Los aquí presentes son ejemplos de esquemas de resolución; ejemplos, insistimos, pues los caminos de demostración son variados. Les acompañan algunos muy breves apuntes téoricos y ejemplos.

Lo que se afirma sin demostración puede ser negado sin demostración.
(Euclides de Mégara (c. 435 - c. 365 a. C.),
https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid_of_Megara).

Capítulo 0

Cimientos

Como parte práctica de cada una de las secciones siguientes, debiésemos estudiar las correspondientes:

- cuestiones Cubit que se listan en ellas, sin olvidarnos de los ejemplos;
- cuestiones extra relacionadas localizadas en el cuaderno de bitácora[1];
- cuestiones, ejercicios y problemas de las obras recomendadas en dicho cuaderno de bitácora y en la bibliografía[2].

Como parte teórica, dichas obras son esenciales. Se recomienda encarecidamente su estudio.

0.0. Rectas

Cubit o.

Hallemos las ecuaciones punto-pendiente de las tres rectas de las cuales son segmentos los lados del triángulo plano de vértices $(1,1)$, $(2,0)$ y $(3,2)$.

Un esquema de resolución.— Aprovecharemos para repasar algunas de las formas de expresar la ecuación de una recta en el plano:

- por los puntos $(1,1)$ y $(3,2)$:
  por un lado, cualquier otro punto (x,y) de la recta ha de ser colineal con estos dos, hecho que podemos expresar por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(ecuación en forma de determinante de orden 3)}$$

  por otro, de los dos puntos conocidos,

$$y - 1 = \frac{2-1}{3-1}(x-1), \qquad \text{(ecuación punto-punto)}$$

  esto es,

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1), \qquad \text{(ecuación punto-pendiente)}$$

[1] En la impartición en los años académicos 2024–2025, 2025–2026 y 2026–2027 de la asignatura Cálculo para la Edificación en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura (UEX), se ha llevado un cuaderno de bitácora en el aula virtual de la asignatura en el campus virtual de la UEX.

[2] *Vid. infra* pág. 227 de esta edición.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

es decir,

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \qquad \text{(ecuación explícita)}$$

o sea,

$$x - 2y + 1 = 0, \qquad \text{(ecuación general)}$$

de donde, despejando -1 y dividiendo todo entre -1 (para obtener 1 como término independiente),

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{1/2} = 1, \qquad \text{(ecuación segmentaria [o canónica])}$$

por cuyos denominadores sabemos que la recta corta al eje de abscisas en $(-1,0)$ y al eje de ordenadas en $(0,1/2)$;
además, un vector director de esta recta es $(3-1,2-1)=(2,1)$, de donde,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(ecuación en forma de determinante de orden 2)}$$

y también,

$$(x,y) = (1,1) + t(2,1) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación vectorial)}$$

por lo que,

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación paramétrica)}$$

de donde,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1}, \qquad \text{(ecuación continua [o simétrica])}$$

por otra parte, un vector normal a esta recta es $(1,-2)$ (coeficientes de x e y en la ecuación general), de donde, tomando el punto $(1,1)$ de la recta,

$$1\cdot(x-1) - 2\cdot(y-1) = 0, \qquad \text{(ecuación normal)}$$

y también, como $\sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$,

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0; \qquad \text{(ecuación Hessiana)}$$

► para los dos casos siguientes, [✍] encontremos las ecuaciones que faltan, a saber, la que está en forma de un determinante de orden 3, la segmentaria, la que está en forma de un determinante de orden 2, la normal y la Hessiana:

▪ por los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$:

$$y - 1 = \frac{0-1}{2-1}(x-1), \qquad \text{(ecuación punto-punto)}$$

esto es,

$$y - 1 = -(x-1), \qquad \text{(ecuación punto-pendiente)}$$

es decir,

$$y = 2 - x, \qquad \text{(ecuación explícita)}$$

o sea,

$$x + y - 2 = 0, \qquad \text{(ecuación general)}$$

además, un vector director de la recta es $(2-1,0-1)=(1,-1)$, de donde,

$$(x,y) = (1,1) + t(1,-1) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación vectorial)}$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

por lo que,

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación paramétrica)}$$

de donde,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{1}; \qquad \text{(ecuación continua)}$$

- por los puntos $(2,0)$ y $(3,2)$:

$$y - 0 = \frac{2-0}{3-2}(x-2), \qquad \text{(ecuación punto-punto)}$$

esto es,

$$y = 2(x-2), \qquad \text{(ecuación punto-pendiente)}$$

es decir,

$$y = 2x - 4, \qquad \text{(ecuación explícita)}$$

o sea,

$$2x - y - 4 = 0, \qquad \text{(ecuación general)}$$

además, un vector director de la recta es $(3-2, 2-0) = (1,2)$, de donde,

$$(x,y) = (2,0) + t(1,2) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación vectorial)}$$

por lo que,

$$x = 2 + t, \quad y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(ecuación paramétrica)}$$

de donde,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2}. \qquad \text{(ecuación continua)}$$

A falta de las propuestas en ▶, éstas son. ■

0.1. Números naturales, enteros, racionales y reales. Reducción al absurdo

- Naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$;
- Enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- Enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, m-1, m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$;
- Racionales: $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^+\}$;
- Irracionales: $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, e, \pi, \ldots\}$ (números con desarrollo decimal infinito no periódico);
- Reales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$;
- Reales no nulos: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definición 0.1.— Un conjunto C de números es denso precisamente si para cualesquiera $x, z \in C$, con $x < z$, existe $y \in C$ tal que $x < y < z$.

Teorema 0.— $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son densos.

Demostración.— Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, basta demostrarlo para $\mathbb{N}$: dado $n \in \mathbb{N}$, entre n y $n+1$ no existe ningún número natural. ■

Teorema 1.— $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son densos.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Demostración.— En efecto, dados $p, q \in \mathbb{Q}$, con $p < q$, se satisface que $p < \dfrac{p+q}{2} < q$ (observemos que $(p+q)/2$ es racional por serlo p y q). La demostración es análoga en el caso de $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.— El esquema argumental de la *reducción al absurdo* (RAA) es, dada una afirmación A (su negación se representa por $\neg A$):

Si se supone $\neg A$, entonces se sigue una contradicción.
$\therefore$ Se sigue A.

Ejemplo 0.

Demostremos por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

[EPP 11.11.2024:0.ª.0.B], [EFE 22.5.2025:I.0.A], [EFE 20.6.2025:I.0.A].

Un esquema de resolución.— Demostremos primero un lema.

Lema.— $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración del lema.— Usemos para ello reducción al absurdo; en efecto, si n^2 es par, no puede ser n impar, porque si lo fuese, entonces $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k+1)$, de donde $(\exists k \in \mathbb{Z})(n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1^2 + 4k = 2(2k^2+2k)+1)$, esto es, $(\exists k' \in \mathbb{Z})(n^2 = 2k'+1)$, es decir, n^2 es impar; he aquí el absurdo, n^2 es a la vez impar y par.

Demostremos ahora que $\sqrt{2}$ no es un número racional, también por reducción al absurdo.

Supongamos que existen $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, tales que $\sqrt{2} = p/q$, siendo p/q una fracción irreducible (*i. e.*, $\text{m. c. d.}(p,q) = 1$). De aquí, $p^2 = 2q^2$, esto es, p^2 es par, de donde, por el lema, p es par, es decir, $(\exists k \in \mathbb{Z})(p = 2k)$, por lo que $p^2 = 2^2k^2 = 2q^2$, de donde, $q^2 = 2k^2$, por lo que q^2 es par y así, por el lema, q es par. Al ser p y q ambos pares, p/q es reducible (*i. e.*, $\text{m. c. d.}(p,q) \geq 2$). He aquí el absurdo: p/q es a la vez reducible e irreducible. ■

Definición 0.2.— Para todo $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto $|x| \in \mathbb{R}$ de x está definido por: $|x| = -x$ si $x < 0$, $|x| = x$ si $0 \leq x$.

Teorema 3 (*Algunas propiedades de* $|x|$).— Para todo $x \in \mathbb{R}$:

I. $0 \leq |x|$;
II. $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;
III. $|x| \leq y$ si, y sólo si, $-y \leq x \leq y$;
IV. $y \leq |x|$ si, y sólo si, $x \leq -a$ o $a \leq x$;
V. $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$;
VI. $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$;
VII. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
VIII. $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$.

Cubit 1.

Si $|x-a| < b$, acotemos inferior y superiormente x, esto es, hallemos k y k', reales, tales que $k < x < k'$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— Suponiendo $b > 0$ para que tenga solución, entonces, por definición de valor absoluto, $|y| = y$ si $y \geq 0$, $|y| = -y$ si $y < 0$, por lo que $|y| < b$ es $y < b$ si $y \geq 0$, $-y < b$ si $y < 0$, esto último es, $-b < y$ si $y < 0$, en definitiva, sólo dos opciones, $-b < y$ o $y < b$, abreviadamente, $-b < y < b$. Tomando ahora $y = x - a$, $|x - a| < b$ equivale a $-b < x - a < b$, de donde, sumando a los tres miembros a, $a - b < x < a + b$; por lo tanto, una cota inferior es $k = a - b$ y una cota superior es $k' = a + b$; resumiendo, si $b > 0$: $|x - a| < b$ si, y sólo si, $a - b < x < a + b$. ■

Cubit 2.

Demostremos por reducción al absurdo que $(\forall z \in \mathbb{Z})$ (z^2 es par $\rightarrow z$ es par).

Un esquema de resolución.— En efecto, si z^2 es par, no puede ser z impar, porque si lo fuese, entonces $(\exists k \in \mathbb{Z})(z = 2k + 1)$, de donde $(\exists k \in \mathbb{Z})(z^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 1^2 + 4k = 2(2k^2 + 2k) + 1)$, esto es, $(\exists k' \in \mathbb{Z})(z^2 = 2k' + 1)$, es decir, z^2 es impar; he aquí una contradicción, z^2 es a la vez impar y par; por lo tanto, por reducción al absurdo tenemos justo lo que queríamos demostrar. ■

Observación 0.— La estructura lógica de la afirmación es $\forall z(Pz \rightarrow Qz)$; su negación es $\exists z \neg(Pz \rightarrow Qz)$, esto es, $\exists z(Pz \wedge \neg Qz)$; en palabras: negar la afirmación «si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par» equivale a afirmar que «existe un número entero impar tal que su cuadrado es par».

Cubit 3.

Demostremos que si r^* es un racional no nulo e i es un irracional, entonces el producto $r^* \cdot i$ es irracional.

Un esquema de resolución.— Usemos para ello reducción al absurdo; si no fuese irracional, sería racional, esto es, existirían $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, tales que $r^* \cdot i = p/q$, de donde, $i = \dfrac{p}{r^* \cdot q}$, esto es, i sería racional (por serlo el producto y división de racionales); he aquí una contradicción, i sería a la vez irracional y racional; por lo tanto, queda demostrado por reducción al absurdo lo que afirma el enunciado. ■

Cubit 4.

Demostremos que $\log_{10} 2$ es irracional.

Un esquema de resolución.— Sea $r = \log_{10} 2$; por definición de logaritmo, $10^r = 2$ (las funciones $\log_b x$ y b^x son inversas siendo $b \in (1, \rightarrow)$ y $x \in (0, \rightarrow)$); razonemos por reducción al absurdo; si r no fuese irracional, sería racional, esto es, existirían $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, tales que $r = p/q$; sustituyendo en la ecuación anterior, $10^{p/q} = 2$, de donde, elevando ambos miembros a la potencia q, $\left(10^{p/q}\right)^q = 2^q$, esto es, $10^p = 2^q$, y de aquí, factorizando, $2^p 5^p = 2^q$; como p y q son enteros y 2 y 5 son primos, estamos ante una igualdad de dos descomposiciones en factores primos, por lo que los exponentes de éstos deben ser iguales, esto es, de los exponentes de 2, $p = q$, y de los exponentes de 5, $p = 0$; por lo tanto, $p = 0$ y $q = 0$; he aquí una contradicción, $q = 0$ y $q \neq 0$ (es el denominador de una fracción); por lo tanto, por reducción al absurdo tenemos que $\log_{10} 2$ es irracional. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cubit 5.

Si dos móviles infinitesimales parten del punto medio de la base de un triángulo equilátero con la misma velocidad constante, recorriendo uno la altura (ida y vuelta, otra vez ida y vuelta, y así sucesivamente, sin parar) y el otro el perímetro (una y otra vez, y así sucesivamente, sin parar), ¿coincidirán alguna vez?

[EPP 10.11.2025:I.0.A].

Un esquema de resolución.— Sea A el móvil que recorre la altura y B el que recorre el perímetro; sea h la altura y $2l$ la longitud de un lado, entonces, por el teorema de Pitágoras, $h^2 = (2l)^2 - l^2 = 3l^2$, esto es, la altura mide $h = l\sqrt{3}$; razonemos por reducción al absurdo: si se encontrasen de nuevo, A habría recorrido un número de veces, digamos m ($\in \mathbb{Z}^+$), la altura, y B, un número de veces, digamos n ($\in \mathbb{Z}^+$), la mitad del lado, en otras palabras, $mh = nl$, de donde, $ml\sqrt{3} = nl$, por lo que $m\sqrt{3} = n$, lo cual es una contradicción pues según esto el producto $m\sqrt{3}$ es racional, pero como $\sqrt{3}$ es irracional, sabemos (Cubit 3) que dicho producto es irracional; por lo tanto, por reducción al absurdo deducimos que los móviles no coincidirán. ■

Observación 1.— Alternativamente, de $m\sqrt{3} = n$ se sigue $\sqrt{3} = n/m$, esto es, que $\sqrt{3}$ es racional; he aquí una contradicción, pues sabemos que $\sqrt{3}$ es irracional[3]; por lo tanto, por reducción al absurdo deducimos que los móviles no coincidirán.

Cubit 6.

Hallemos la ecuación en $\mathbb{R}$ de un punto x del segmento $[p,q]$ en función de p y q.

Un esquema de resolución.— La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(p,0)$ y $(q,0)$ es $(x,y) = (p,0) + t(q-p,0)$, $t \in \mathbb{R}$; de ella, $x = p + t(q-p)$, $t \in \mathbb{R}$, esto es, $x = (1-t)p + tq$, $t \in \mathbb{R}$; de aquí que la ecuación paramétrica del segmento en $\mathbb{R}$ sea $x = (1-t)p + tq$, $t \in [0,1]$ (una combinación lineal convexa de p y q). ■

Observación 2.— Esto se extiende fácilmente a más dimensiones; por ejemplo, las coordenadas de un punto X del segmento PQ, donde P y Q son dos puntos del plano, de coordenadas (x_P, y_P) y (x_Q, y_Q) son $((1-t)x_P + tx_Q, (1-t)y_P + ty_Q)$, con $t \in [0,1]$. Claro que si, por ejemplo, lo que nos interesase fuesen las coordenadas de cualquier punto X del cuadrado relleno (una bola cerrada según d_∞) de diagonal el segmento PQ, tendríamos que utilizar dos parámetros: $((1-\alpha)x_P + \alpha x_Q, (1-\beta)y_P + \beta y_Q)$, con $\alpha, \beta \in [0,1]$.

0.2. Más sobre la reducción al absurdo

Cubit 7.

Un plano ha sido pintado arbitrariamente usando dos colores (un ejemplo es un mantel blanco sobre el que se ha derramado tinta). Demostremos que siempre es posible hallar un segmento de longitud uno cuyos extremos son de un mismo color.

Un esquema de resolución.— La cuestión se plantea en un plano y con él debemos razonar (el mantel, un paralelogramo, es sólo una metáfora aclaratoria). Por otra parte, para afirmar que encontrar un segmento de extremos de distinto color es una contradicción, debemos haber admitido en algún momento que todos los segmentos que pudiésemos encontrar tienen sus extremos

[3] En realidad, $\sqrt{m}$ es irracional si, y sólo si, m no es un cuadrado perfecto; en general, sucede con la raíz enésima: $\sqrt[n]{m}$ es irracional si, y sólo si, m no es una potencia n perfecta.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

de un mismo color, pero ésto implica haber incluido como hipótesis lo que queremos demostrar, a saber, que es posible encontrar un segmento con sus extremos de un mismo color.

Queremos demostrar una afirmación con la estructura $P \to Q$, representando P el hecho de tener un plano coloreado con dos colores y Q que es posible encontrar un segmento de longitud 1 cuyos extremos sean de un mismo color. Para razonar por reducción al absurdo (Abs, RAA), debemos suponer $P \wedge \neg Q$, esto es, que tenemos el plano coloreado con dos colores (P) y que no es posible encontrar un segmento de longitud 1 cuyos extremos sean de un mismo color ($\neg Q$) (en otras palabras, que en dicho plano, todos los segmentos de longitud 1 tienen sus extremos de colores distintos). Ahora se trata de demostrar que de ello se deriva una contradicción, para, finalmente, aplicar RAA y deducir que, en efecto, se tiene $P \to Q$.

Hagámoslo. Supongamos que tenemos el plano coloreado con dos colores (P) y que no es posible encontrar un segmento de longitud 1 cuyos extremos sean del mismo color ($\neg Q$). En dicho plano, pensemos ahora en un triángulo equilátero ABC de lado 1. Debido a suponer $\neg Q$, A y B deben ser de distinto color y también deben serlo A y C, esto es, hablamos de tres colores distintos (ya que B y C también son extremos de un segmento de longitud 1). Hemos llegado a una contradicción, a saber, el plano está coloreado con dos colores (P) y a la vez lo está con tres (hemos deducido esto último). Así nuestra suposición era falsa. Por tanto, por reducción al absurdo, deducimos la veracidad de lo afirmado en el enunciado de la cuestión. ■

Cubit 8.

Existen múltiples variantes del juego del ajedrez. En una de ellas con jugada doble, las reglas del juego son las mismas que en el ajedrez, con la excepción de que quienes juegan pueden hacer a voluntad una o dos jugadas seguidas. Demostremos por reducción al absurdo que quien inicia el juego tiene una estrategia que le garantiza al menos las tablas.

Un esquema de resolución.— Supongamos lo contrario, esto es, que quien inicia el juego, pierde. Digamos que comienzan blancas. Pero como es de jugada doble, en la jugada inicial esta persona puede recrear la posición original del tablero —bastaría, por ejemplo, que moviese un caballo a una posición accesible y la devolviese a su posición original—. Así, el papel de persona que inicia el juego ahora es de quien juega negras. Pero como inicia el juego, pierde. Total, que ambas personas pierden. Lo cual no es posible, es una contradicción. Por reducción al absurdo, se sigue lo contrario al punto de partida, quien inicia no pierde, esto es, que como mínimo consigue tablas.[4] ■

Cubit 9.

De ser un número entero múltiplo de 10, ¿es posible deducir que es múltiplo de 5?

Un esquema de resolución.— Esto es, ¿$(\forall x \in \mathbb{Z})(x$ múltiplo de $10 \to x$ múltiplo de $5)$? Pues sí. En efecto, usemos reducción al absurdo (Abs, RAA). Designemos x es múltiplo de 10 por A y x es mútiplo de 5 por B. Supongamos ahora que ocurriese $A \wedge \neg B$, esto es, x es múltiplo de 10 y x no es mútiplo de 5, pero esto conduce a contradicción, pues si x es múltiplo de 10, entonces

[4] No me resisto a citar aquí la resolución aportada por Alejandro Fernández Camello (año académico 2019-2020), por si es más clarificadora: «Partimos de que en una partida de ajedrez hay únicamente tres resultados posibles desde la perspectiva de las blancas ganan, empatan o pierden. Queremos demostrar que existe una estrategia para las blancas de al menos poder empatar, suponemos que la negación de esta hipótesis es verdadera, es decir, que las negras poseen una estrategia ganadora para cualquier estrategia del blanco. Las blancas pueden hacer dos jugadas en su turno, y tienen cuatro maneras (Cf3 Cg1,Ch3 Cg1, Cc3 Cb1, Ca3 Cb1) de mantener la posición inicial cediéndole el turno a las negras, es decir, que las blancas pasarían a ser las negras y viceversa. Por tanto, las blancas contarían también con una estrategia ganadora para cualquier estrategia negra llevándonos a una contradicción y al aplicar reducción al absurdo obtenemos que nuestra hipótesis inicial de que las blancas tienen al menos una estrategia para empatar resulta verdadera».

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

x es de la forma $5k$, para algún k entero, de donde x es múltiplo de 5; la contradicción consiste en que se tiene a la vez que x es múltiplo de 5 (resultado de ser múltiplo de 10) y que x no es múltiplo de 5 ($\neg B$). Por tanto, por reducción al absurdo, tenemos que $A \to B$, justo lo que queríamos demostrar. ■

Cubit 10.

¿Si un número real sumado consigo mismo es él mismo, entonces tal número es el cero?

Un esquema de resolución.— Sí. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}, A \wedge \neg B \leftrightarrow x + x = x \wedge x \neq 0$; al ser $x \neq 0$, es admisible dividir $2x = x$ entre x, lo cual conduce a la fórmula insatisfactible $2 = 1$. Por lo tanto, por reducción al absurdo, $x = 0$. ■

Cubit 11.

Dado que en un triángulo el lado mayor y el ángulo mayor son opuestos, pudiese conjeturarse que, en general, en un triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a las magnitudes de sus ángulos opuestos. Ahora bien, si esto fuese verdad, en un triángulo de ángulos 30, 60 y 90 grados, los lados serían proporcionales a 1, 2 y 3, esto es, que sus lados x, y, z, seguirían la proporción $x : y : z = 30 : 60 : 90 = 1 : 2 : 3$. Pero esto no es cierto, ¿verdad?

Un esquema de resolución.— Veamos. Supongamos que siguen dicha proporción; los lados son $x = k$, $y = 2k$, $z = 3k$, un ángulo es de 90 grados, el lado mayor es $z = 3k$ que es la hipotenusa, los otros lados son $x = k$ e $y = 2k$; por el teorema de Pitágoras, $(3k)^2 = k^2 + (2k)^2$, esto es, $9k^2 = k^2 + 4k^2$, o sea, $9k^2 = 5k^2$, de donde, por ser $k > 0$, deducimos que $9 = 5$, es decir, una contradicción; de aquí, por reducción al absurdo, deducimos que no siguen dicha proporción. Por lo tanto, no es cierto que en todo triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a las magnitudes de sus ángulos opuestos. ■

0.3. Relaciones y funciones

0.3.0. Relaciones y sus representaciones

Definición 0.3.— Definimos una *relación diádica* como un subconjunto R de un producto cartesiano de conjuntos $X \times Y$. Como subconjunto de $X \times Y$ significa que R es un conjunto de pares ordenados. Cuando $\langle x, y\rangle \in R$ decimos que «x está relacionado con y» y escribimos xRy (notación infijo) o Rxy (notación prefijo, justo tal y como se escribe considerando R como predicado diádico); decimos de x que es el *antecedente* de R y de y que es el *consecuente* de R; decimos *término* de R en vez de antecedente o consecuente de R.

Sean $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ y la relación diádica $R = \{\langle x_0, y_2\rangle, \langle x_0, y_3\rangle, \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_0\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_0\rangle, \langle x_3, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\}$. Destacamos otras cuatro representaciones.

Cartesiana, esto es, con ejes cartesianos.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

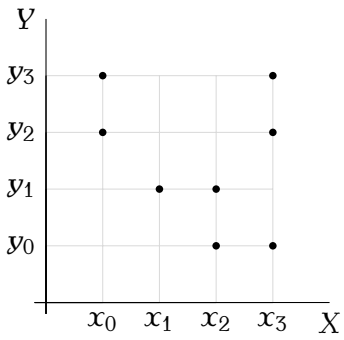


Figura 0.1: *Diagrama cartesiano* de la relación diádica R.

Sagitaria, esto es, con conjuntos y flechas.

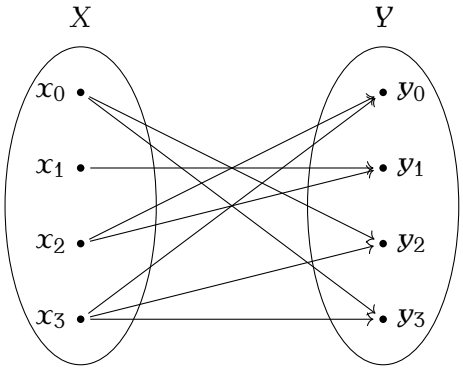


Figura 0.2: *Diagrama sagital* de la relación diádica R.

Matricial, esto es, con una matriz lógica.

$$\begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 0.3: *Matriz lógica* de la relación diádica R.

Gráfica bipartita dirigida, esto es, mediante un grafo bipartito dirigido.

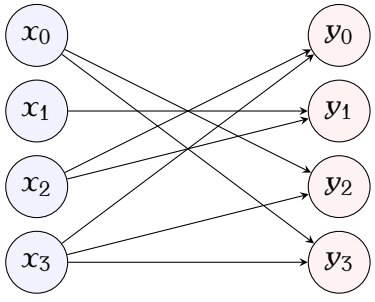


Figura 0.4: *Grafo bipartito dirigido* de la relación diádica R.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Digráfica, esto es, mediante un grafo dirigido. Suponiendo $X = Y$, elemento a elemento (es decir, siendo $x_0 = y_0$, ..., $x_3 = y_3$), tenemos también la siguiente representación como grafo dirigido (digrafo), DG_R.

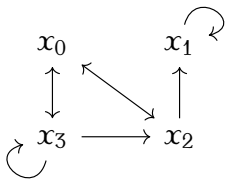


Figura 0.5: *Grafo dirigido* (*digrafo*) de la relación diádica R.

Representamos este digrafo por el par ordenado $\langle K, A\rangle$, donde $K = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ es el conjunto de *nodos*/*vértices* y $A \subseteq K \times K$, $A = \{\langle x_0, x_2\rangle, \langle x_0, x_3\rangle, \langle x_1, x_1\rangle, \langle x_2, x_0\rangle, \langle x_2, x_1\rangle, \langle x_3, x_0\rangle, \langle x_3, x_2\rangle, \langle x_3, x_3\rangle\}$, el conjunto de arcos —en los digrafos, dos nodos, digamos x e y, pueden estar unidos mediante un *arco*, hecho que representamos mediante el par ordenado $\langle x, y\rangle$, en cuyo caso llamamos *origen* del arco a x y *extremo* del arco a y; llamamos *lazo* a un arco del tipo $\langle x, x\rangle$, esto es, con origen y extremo iguales—.

0.3.1. Correspondencias, funciones y aplicaciones

Definición 0.4.— Una *correspondencia* es una relación. Dados dos conjuntos X y Y, una relación $R \subseteq X \times Y$ y un par ordenado $\langle x, y\rangle \in R$, decimos que y es la *imagen* o el valor de x por R (también decimos de x que es la *antiimagen* de y) y este hecho lo representamos por $y = R(x)$. En este ámbito se representa la propia correspondencia por $R : X \to Y$; afirmar aquí que $y = R(x)$ equivale a afirmar que $\langle x, y\rangle \in R$, en la vista de R como relación.

Definición 0.5.— Dados dos conjuntos X e Y y una correspondencia $f : X \to Y$, se denomina:

- *conjunto de partida* (o *conjunto inicial* o *predominio*) de f al conjunto X;
- *conjunto de llegada* (o *conjunto final* o *codominio*) de f al conjunto Y;
- *dominio* (o, sinónimamente, *conjunto original*, *conjunto de orígenes* o *imagen conversa*) de f al conjunto $\operatorname{dom} f = \{x \in X : \exists y \in Y, y = f(x)\}$;
- *rango* (o, sinónimamente, *conjunto imagen*, *imagen*, *conjunto de imágenes*, *contradominio*, *dominio converso* o *recorrido*) de f al conjunto $\operatorname{ran} f = \{y \in Y : \exists x \in X, y = f(x)\}$;
- *campo* de f al conjunto $\operatorname{cam} f = \operatorname{dom} f \cup \operatorname{ran} f$;
- *grafo* de f a la propia función vista como conjunto de pares ordenados, es decir, al conjunto $\{\langle x, y\rangle : y = f(x)\}$ que pudiésemos designar por f o por G_f si quisiésemos destacar que una relación f queda determinada cuando se conoce la terna $\langle X, Y, G_f\rangle$ (en otras palabras, una correspondencia f es una terna $\langle X, Y, G_f\rangle$ donde G_f es un subconjunto de $X \times Y$ —G_f es la relación diádica que se identifica con f—);
- $y \in Y$ es un *elemento imagen* de $x \in X$ precisamente si $\langle x, y\rangle \in G_f$;
- el *conjunto imagen* de $S \subseteq X$ es $\{y \in Y : (\exists x \in S)(\langle x, y\rangle \in G_f)\}$;
- $x \in X$ es un *elemento origen* (o *elemento preimagen*) de $y \in Y$ precisamente si $\langle x, y\rangle \in G_f$;
- el *conjunto origen* (o *conjunto preimagen*) de $T \subseteq Y$ es $\{x \in X : (\exists y \in T)(\langle x, y\rangle \in G_f)\}$.

Definición 0.6.— Decimos que una correspondencia $f : X \to Y$ es una *función* precisamente si es una relación funcional, esto es, si asigna como mucho un elemento de $\operatorname{ran} f$ a cada elemento de $\operatorname{dom} f$; en otras palabras, la imagen de todo elemento de $\operatorname{dom} f$ es un subconjunto unitario de Y.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Si los conjuntos son iguales, decimos que es una *endofunción*.

A la endofunción $id_X : X \to X$, definida por $id_X(x) = x$, para todo $x \in X$, la denominamos *función identidad* en X y no es más que la *relación identidad* I_X en X.

Definición 0.7.— Decimos que una función $f : X \to Y$ es una *aplicación* precisamente si $\mathrm{dom}(f) = X$. En otras palabras, una aplicación $f : X \to Y$ es una relación funcional cuyo dominio es X y cuyo rango es un subconjunto de Y. Esto obliga a que para cualquier $x \in X$, existe un único $y \in Y$ tal que $\langle x, y\rangle \in G_f$, escribiéndose esto último $y = f(x)$, como ya hemos dicho. En resumen, $f : X \to Y$ es una aplicación $\leftrightharpoons$ 0.º $\wedge$ 1.º $\wedge$ 2.º, donde:

1.º, $\mathrm{dom}\, f = X$;
2.º, $\mathrm{ran}\, f \subseteq Y$, y
3.º, $(\forall x \in X)\,(\forall y, z \in Y)\,(y = f(x) \wedge z = f(x) \to y = z)$.

Teorema 4.— $f : X \to Y$ es una aplicación si, y sólo si, $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(f(x) = y)$.

0.3.2. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición 0.8.— Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Entonces decimos que:

I. f es *inyectiva* si, y sólo si, todo elemento imagen lo es exactamente de un único elemento original, esto es, precisamente si $(\forall x, y \in X)(f(x) = f(y) \to x = y)$.
II. f es *sobreyectiva* (suprayectiva o exhaustiva) precisamente si $\mathrm{ran}\, f = Y$, es decir, precisamente si todo elemento del conjunto final es imagen de algún elemento del conjunto inicial, esto es, si, y sólo si, $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$.
III. f es *biyectiva* precisamente si es inyectiva y sobreyectiva.

Teorema 5 (*Caracterización de la biyectividad*).— Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Entonces:

f es biyectiva si, y sólo si, $\forall y \in Y, \exists! x \in X, f(x) = y$.

0.3.3. Composición de funciones

Definición 0.9 (de la función compuesta).— Sean X, Y, Z conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones tales que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. Definimos la *composición* de f y g, como $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

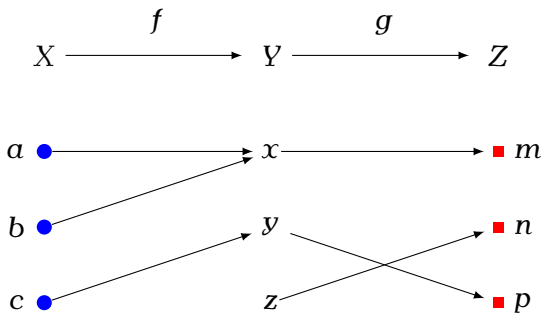
Teorema 6.— Dados X, Y, Z conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones tales que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, la composición $g \circ f$ es una función, la *función compuesta* de f y g.

Ejemplo 1.

Sean las funciones $f : \{a, b, c\} \to \{x, y\}$ y $g : \{x, y\} \to \{m, n, p\}$ definidas respectivamente por $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = y$, y por $g(x) = m$, $g(y) = p$, $g(z) = n$. Esfudiemos la función compuesta de f y g.

Un esquema de resolución.— Gráficamente:

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'



Observamos que $\operatorname{dom} f = \{a,b,c\}$, $\operatorname{im} f = \{x,y\} \subseteq \{x,y,z\} = \operatorname{dom} g$, $\operatorname{im} g = \{m,n,p\}$, que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{dom} g$ y que $\operatorname{dom}(g \circ f) = \{a,b,c\}$ e $\operatorname{im}(g \circ f) = \{m,p\}$ y que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = m$, $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = m$, $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = p$. ■

Observación 3.— Se dice a veces que X *determina funcionalmente* Z a través de Y (o, sinónimamente, que Z *depende funcionalmente* de X a través de Y).

Teorema 7 (*Propiedades*).— Sean W, X, Y, Z conjuntos y $f : W \to X$, $g : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ funciones tales que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ y $\operatorname{im}(g) \subseteq \operatorname{dom}(h)$; entonces:

I. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (asociatividad de $\circ$).
II. si f, g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
III. si f, g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
IV. si f, g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Observación 4.— La composición de funciones no es conmutativa.

0.3.4. Inversa o recíproca

Definición 0.10.— Si una función $f : X \to Y$ es inyectiva, hablamos de $f^{-1} : Y \to X$, que asocia a y el único x tal que $f(x) = y$, y denominamos función *inversa* (o *recíproca*) de f y también es inyectiva (por ser f una función).

Dicho de otro modo, si f es inyectiva y viene dada por la terna $\langle X, Y, G_f \rangle$, entonces f^{-1} también es inyectiva y viene dada por la terna $\langle X, Y, G_{f^{-1}} \rangle$ donde $G_{f^{-1}} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in G_f\}$.

Teorema 8.— Sean $f : X \to Y$ una función inyectiva y $V, W \subseteq Y$. Se satisface que:

I. $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f$;
II. $\operatorname{ran} f^{-1} = \operatorname{dom} f$;
III. $\operatorname{cam} f^{-1} = \operatorname{cam} f$;
IV. f^{-1} es función inyectiva;
V. si f es aplicación, entonces f^{-1} es función sobreyectiva;
VI. si f y f^{-1} son aplicaciones, entonces ambas son aplicaciones biyectivas;
VII. si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = I_X$ y $f \circ f^{-1} = I_Y$;
VIII. $(f^{-1})^{-1} = f$;
IX. $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$;
X. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$;
XI. $f : X \to Y$ es biyectiva si, y sólo si, $\exists f^{-1} : Y \to X$ y f^{-1} es biyectiva.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

0.3.5. Ejercicios resueltos

Cubit 12.

Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - |x|$, demostremos que no existe la inversa de f en $[-1,1]$.

Un esquema de resolución.— No tiene inversa por no ser inyectiva en $[-1,1]$, pues cualquier número y su opuesto tienen la misma imagen; en efecto, $(\forall r \in [-1,1])(f(r) = 1 - |r| = 1 - |-r|$ [por definición de valor absoluto] $= f(-r))$. ■

Cubit 13.

Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$.

a. Demostremos que f es inyectiva en $[0,\infty)$ y que, por tanto, f tiene inversa en dicho intervalo.
b. De la inversa de f, hallemos su expresión algebraica, dominio e imagen.

Un esquema de resolución.—

a. Si $x, y \in [0,\infty)$, $x \neq y$, entonces $x^2 \neq y^2$ [ambos son no negativos], de donde $x^2 - 2 \neq y^2 - 2$, esto es, $f(x) \neq f(y)$.
b. De $y = x^2 - 2$ se sigue $x = \sqrt{y+2}$, de donde intercambiando nominalmente x por y, $y = \sqrt{x+2}$, siendo ésta justamente la expresión algebraica de la inversa, esto es, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$; su dominio es la imagen de f, $D_{f^{-1}} = \mathrm{Im} f = f([0,\infty)) = [-2,\infty)$ [por ser f estrictamente creciente y no acotada superiormente en $[0,\infty)$]; su imagen es $\mathrm{Im} f^{-1} = f^{-1}([-2,\infty)) = [0,\infty)$, justo el dominio de f. ■

Cubit 14.

De las funciones reales de variable real definidoras de las ecuaciones punto-pendiente de las tres rectas de las cuales son segmentos los lados del triángulo plano de vértices $(1,1)$, $(2,0)$ y $(3,2)$, demostremos que son biyectivas y hallemos sus inversas.

Un esquema de resolución.— Encontramos en Cubit 0 dichas ecuaciones; las funciones definitorias nos las proporcionan las ecuaciones explícitas y son: $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ para los puntos $(1,1)$ y $(3,2)$; $g(x) = 2 - x$ para los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$; $h(x) = 2x - 4$ para los puntos $(2,0)$ y $(3,2)$. Veamos que son biyectivas (por tanto, tienen inversa) y hallemos las expresiones algebraicas de sus inversas.

- $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$:
  - es inyectiva: si $f(x) = f(y)$, esto es, si $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{2}$, entonces $\dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2}y$, es decir, $x = y$;
  - es sobreyectiva: de $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$, esto es, de $y = \dfrac{x+1}{2}$, se sigue $x = 2y - 1$; este $x = 2y - 1 \in \mathbb{R}$ [ya que $y \in \mathbb{R}$]; en definitiva, para todo $y \in \mathbb{R}$, hemos encontrado un $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$;
  - de $x = 2y - 1$, intercambiando nominalmente x por y, obtenemos la expresión algebraica de su inversa, $f^{-1}(x) = 2x - 1$.
- $g(x) = 2 - x$:
  - es inyectiva: si $g(x) = g(y)$, esto es, si $2 - x = 2 - y$, entonces $-x = -y$, es decir, $x = y$;
  - es sobreyectiva: de $g(x) = 2 - x$, esto es, de $y = 2 - x$, se sigue $x = 2 - y$; este $x = 2 - y \in \mathbb{R}$ [ya que $y \in \mathbb{R}$]; en definitiva, para todo $y \in \mathbb{R}$, hemos encontrado un $x \in \mathbb{R}$ tal que

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

$y = g(x)$;
- de $x = 2 - y$, intercambiando nominalmente x por y, obtenemos la expresión algebraica de su inversa[5] , $g^{-1}(x) = 2 - x$.

▪ $h(x) = 2x - 4$:
- es inyectiva: si $h(x) = h(y)$, esto es, si $2x - 4 = 2y - 4$, entonces $2x = 2y$, es decir, $x = y$;
- es sobreyectiva: de $h(x) = 2x - 4$, esto es, de $y = 2x - 4$, se sigue $x = \frac{y+4}{2}$; este $x = \frac{y+4}{2} \in \mathbb{R}$ [ya que $y \in \mathbb{R}$]; en definitiva, para todo $y \in \mathbb{R}$, hemos encontrado un $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$;
- de $x = \frac{y+4}{2}$, intercambiando nominalmente x por y, obtenemos la expresión algebraica de su inversa, $h^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$. ■

0.4. Cardinalidad

David Hilbert relata la historia de un hotel con infinitas habitaciones, que según Martin Gardner populariza, «se extienden hasta un espacio de dimensión superior a través de un agujero negro», numeradas de 1 en adelante. Un buen día, y aunque todo estaba ocupado, se pudo dar cabida a una persona que quería hospedarse, simplemente desplazando a quienes ocupaban cada habitación a la siguiente en número; en otra ocasión, pudo hacerse con cinco personas, sólo se tuvo que desplazar a quienes ocupaban la habitación n a la $n + 5$ —para cualquier número de habitación n—. Algo más formalmente, esto corresponde la acción de la aplicación $f : H \to H$, definida por $f(h_i) = h_{i+5}$, siendo H el conjunto de todas las habitaciones, con lo que, las 5 primeras habitaciones quedan libres, pues quien ocupa la habitación uno, pasa a alojarse en la habitación $1 + 5$, etc. Otro día se generó un problema, aparentemente mucho más complicado, llegaron infinitas personas con la pretensión de alojarse; pero también se consiguió, ¿cómo?[6]

Notemos que f y g son aplicaciones inyectivas y no sobreyectivas.

0.4.0. Lo equipotente

El cardinal de un conjunto finito es su número de elementos. Pero, hablar de «número de elementos» entre conjuntos infinitos, puede crearnos cierta confusión: parece que tenemos claro que hay más elementos en el conjunto de los naturales, que en el de los naturales pares (incluso pudiésemos atrevernos a decir que el doble); sin embargo, como hemos visto en el ejemplo del hotel de Hilbert, debería haber el mismo número, pues todos los huéspedes del hotel (tantos como números naturales) han sido alojados en las habitaciones pares.

Definición 0.11 (Conjuntos equipotentes).— (Bolzano, 1851; Cantor, 1878). Decimos que dos conjuntos X e Y son *equipotentes* si, y sólo si, existe una aplicación biyectiva entre ellos. Pudiésemos utilizar la notación de aplicaciones[7], si bien simplificamos y, en adelante, $X \approx Y$ designa la equipotencia de X e Y.

[5] Observemos que g y g^{-1} son la misma; las funciones que coinciden con sus inversas se conocen como *involuciones* (*vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Involución_(matemática)).

[6] Pues, desplazando, para toda habitación n, a las personas que ocupan la habitación n a la habitación de número doble que la original; de este modo, quedan libres todas las habitaciones impares, que son infinitas, y se pueden alojar en ellas el número infinito de personas que quería hospedarse. La aplicación sería $g : H \to H$, definida por $g(h_i) = h_{2i}$.

[7] Inyectiva: $\rightarrowtail$ o $\hookrightarrow$; sobreyectiva: $\twoheadrightarrow$; biyectiva: $\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Ejemplo 2.

Demostremos que $\mathbb{Z}^+ \approx \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$.

Un esquema de resolución.— En efecto, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, definida por $f(n) = n + 1$ es una biyección entre ellos (esto es lo que ocurre en el primer caso de la historia del hotel del infinito). ■

Ejemplo 3.

Demostremos que $\mathbb{Z}^+ \approx \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, \ldots, k\}$.

Un esquema de resolución.— En efecto, en general, $\mathbb{Z}^+$ es equipotente a $\mathbb{Z}^+$ menos un número finito de elementos cualesquiera; no se pierde generalidad en suponer que este número finito está al principio, así $\mathbb{Z}^+ \approx \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, \ldots, k\}$, debido a que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, \ldots, k\}$, definida por $f(n) = n + k$, es una biyección entre ellos. (esto es lo que ocurre en el segundo caso de la historia del hotel del infinito, con $k = 5$). ■

Ejemplo 4.

Demostremos que $\mathbb{Z}^+ \approx \text{Pares}^+$.

Un esquema de resolución.— En efecto, $f : \mathbb{Z}^+ \to \text{Pares}^+$, definida por $f(n) = 2n$, es una biyección entre ellos (esto proporciona la solución para acomodar a los infinitos huéspedes). ■

0.4.1. Lo numerable

Definición 0.12 (Cardinal del conjunto de números naturales).— Cantor eligió $\aleph_0$ para designar el cardinal de $\mathbb{N}$ —el signo $\aleph$ es «alef», la primera letra del alfabeto hebreo—.

Definición 0.13 (Conjunto numerable).— Decimos que un conjunto X es infinito numerable o, simplemente, numerable o que su potencia es numerable, si es equipotente a $\mathbb{N}$, es decir, si $|X| = \aleph_0$.

Teorema 9.— $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables, esto es, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

0.4.2. Lo continuo

Cantor designa por $\mathfrak{c}$ la *potencia del continuo*, esto es, el cardinal del conjunto $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5.

El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es equipotente a $(0, 1)$, esto es, $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, en otras palabras, $|\mathbb{R}| = |(0, 1)| = \mathfrak{c}$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.— La aplicación biyectiva

$$\begin{array}{rccl} f : (0,1) & \to & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x(x-1)} & \end{array}$$

demuestra la equipotencia de $\mathbb{R}$ con $(0,1)$. ■

Teorema 10 (*Lo numerable está estrictamente dominado por lo continuo*).— $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Demostración.— Acabamos de demostrar que $\mathbb{R} \approx (0,1)$; bastará, pues, razonar para este intervalo. Imaginemos que tenemos enumerados todos los números reales del intervalo $(0,1)$ y consideremos sus representaciones decimales; es posible definir un número real distinto de todos los de tal enumeración, simplemente, haciendo que el dígito n del nuevo número sea distinto del dígito n del número real que está en la posición n de la enumeración. Concretemos, supongamos que existe una enumeración de los números reales, $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ de $(0,1)$,

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\ldots \\ r_1 &= 0, a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ r_2 &= 0, a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ r_3 &= 0, a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

y pensemos en un número real r cuya representación decimal satisfaga que su primer dígito decimal sea distinto del primer dígito decimal a_{00} de r_0, que su segundo dígito decimal sea distinto del segundo dígito decimal a_{11} de r_1, que su tercer dígito decimal sea distinto del tercer dígito decimal a_{22} de r_2, etc. Esto hará que r sea distinto de r_0 en su primer dígito decimal, distinto de r_1 en su segundo dígito decimal, distinto de r_2 en su tercer dígito decimal, etc.

$$\begin{array}{rccccccc} r = & \overline{0,} & \neq a_{00} & \neq a_{11} & \neq a_{22} & \neq a_{33} & \ldots \\ & & \Downarrow^{8} & \Downarrow^{8} & \Downarrow^{8} & \Downarrow^{8} & \\ & & r \neq r_0 & r \neq r_1 & r \neq r_2 & r \neq r_3 & \ldots \end{array}$$

Por ejemplo, sea el número real $r = 0, a_0a_1a_2\ldots$, donde $a_i = a_{ii} + 1$ si $a_{ii} < 9$ y $a_i = a_{ii} - 1$ si $a_{ii} = 9$. Se tiene entonces lo dicho, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$, r es distinto de r_n en el dígito que ocupa la posición n. ■

0.4.3. Ejercicios resueltos

Cubit 15.

Demostremos que $\mathbb{N} \cup \{-23\}$ es numerable.

Un esquema de resolución.— Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-23\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -23 & \text{si } n = 0, \\ n - 1 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Esta función se define en dos subdominios, en $\{0\}$ como la función constante -23, que es biyectiva, y en $\mathbb{Z}^+$ como $n - 1$, también biyectiva (por ser única la asociación entre cada número

[8] Para poder afirmar que dos números reales son distintos si, y sólo si, difieren en una cifra decimal, debemos quedarnos con una de las dos expresiones distintas $0, d_0d_1\ldots d_k999\ldots$ y $0, d_0d_1\ldots d_{k+1}000\ldots$ del mismo número real (por ejemplo, $0,0123456999\ldots = 0,0123457000\ldots$); decidimos quedarnos con la primera, esto es, con que no existen los números de la forma $0, d_0d_1\ldots d_{k+1}000\ldots$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

y su anterior), y como dichos subdominios son disjuntos y sus imágenes, $\{-23\}$ y $\mathbb{N}$, también, se tiene que f es biyectiva. ■

0.5. Espacios métricos y algunos conceptos topológicos

0.5.0. Distancia, espacio métrico y subespacio

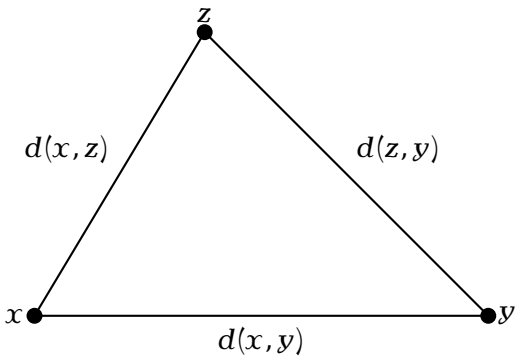
Reflexionemos, brevemente, acerca de nuestro concepto intuitivo de distancia:

1. debiésemos poder medir la distancia entre cualquier pareja de puntos del espacio, esto es, fuese deseable, aunque no imprescindible, que la función distancia, $d : E \times E \to \mathbb{R}$, fuese total;
2. el resultado, la medida de la distancia, debiese ser un número real positivo, así el rango de la función d, debiese ser $\mathbb{R}^+$ es decir, $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$;
3. la distancia desde un punto a él mismo debiese ser cero, y si la distancia entre dos puntos es cero, estos puntos debiesen ser el mismo, o sea, $\forall x, y \in E, x = y \leftrightarrow d(x, y) = 0$;
4. la distancia entre dos puntos x e y, debiese ser la misma, medida desde x hacia y, que desde y hacia x, esto es, $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$.

Definición 0.14 (Primera aproximación a una definición de distancia).— Sea E un conjunto no vacío, cuyos elementos llamamos puntos. Una distancia (o métrica) en E es una función (total), $d : E \times E \to \mathbb{R}$, que satisface (d.1) y (d.2), donde $\forall x, y \in E$:

(d.1) $x = y \leftrightarrow d(x, y) = 0$, y
(d.2) $d(x, y) = d(y, x)$.

En el plano, la suma de las longitudes de cualesquiera dos de los lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercero (el caso de igualdad corresponde a tres puntos alineados). Esta relación es conocida como *desigualdad triangular*; si exigimos que una distancia la satisfaga, lo único que estamos haciendo es definir la distancia entre dos puntos, como la longitud del «camino mínimo que los une».



Llamaremos distancias no triangulares, a aquellas distancias que no satisfagan la desigualdad triangular, y distancias triangulares o simplemente distancias, a las que sí la satisfagan.

Las anteriores condiciones intuitivas que exigíamos a una función para ser distancia se resumen en la siguiente definición formal:

Definición 0.15 (Primera definición de distancia).— Sea E un conjunto no vacío, cuyos elementos llamamos puntos. Una distancia (o métrica) en E es una función (total), $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface (d.1), (d.2) y (d.3), donde $\forall x, y, z \in E$:

(d.1) $x = y \leftrightarrow d(x, y) = 0$;
(d.2) $d(x, y) = d(y, x)$, y

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

(d.3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Observación 5.— De esta primera definición, deducimos fácilmente, que las distancias son no negativas, esto es, que $\forall x,y \in E, d(x,y) \geq 0$. Veámoslo: de la desigualdad triangular (d.3), siendo $z = x$, obtenemos, $d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x)$; por (d.2), $2d(x,y) \geq d(x,x)$, y por (d.1), $2d(x,y) \geq 0$, de donde, $d(x,y) \geq 0$.

Definición 0.16 (Segunda definición de distancia).— Sea E un conjunto no vacío. Una distancia (o métrica) en E es una aplicación d de $E \times E$ en $\mathbb{R}$ que verifica (d.1) y (d.4), donde $\forall x,y,z \in E$:

(d.1) $x = y \leftrightarrow d(x,y) = 0$
(d.4) $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$

Teorema 11 (*Equivalencia de ambas definiciones de distancia*).— Las dos definiciones anteriores de distancia son equivalentes.

Definición 0.17 (Espacio métrico).— El par (E,d) formado por $E \neq \emptyset$ y una distancia d, se denomina espacio métrico. E se llama conjunto base o soporte del espacio métrico.

Ejemplo 6.

El valor absoluto $d_E(x,y) = |x - y|$ es una distancia en $\mathbb{R}$; de hecho, es la distancia que usamos habitualmente para medir; por ejemplo, la distancia entre 2 y 7 es $|2 - 7| = 5$. La conocemos como la distancia del valor absoluto o euclídea en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.

Sea $E \neq \emptyset$ y $d_d : E^2 \to \mathbb{R}$, definida, $\forall x,y \in E$, por:

$$d_d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Ésta es una función distancia que conocemos como *distancia discreta*.

Ejemplo 8.

Sea $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Definimos la distancia de Hamming. $\forall x,y \in E$:

$$d_H(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Ejemplo 9.

Definimos la distancia de Moulton, $\forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$, siendo r la recta definida por ambos:

$$d_M((x_0,y_0),(x_1,y_1)) = \begin{cases} d_E((x_0,y_0),(x_1,y_1)) & \text{si } r \text{ es } x = 0 \text{ o no corta al eje OY} \\ d_E((x_0,y_0),(0,b)) + d_E((0,b),(x_1,y_1)) & \text{si } r \text{ corta al eje OY en } (0,b) \end{cases}$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 12 (*Propiedades inmediatas de distancia*).— $(\forall x, y, z \in E)$:

1. $d(x,y) \geq 0$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \geq |d(x,y) - d(y,z)|$;
4. $(\forall x_1, ..., x_n \in E)(d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + ... + d(x_{n-1}, x_n))$.

Definición 0.18 (Subespacio métrico).— Si (E,d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$, decimos que (A,d) es subespacio métrico de (E,d) si, y sólo si, d es la restricción de d a A.

Definición 0.19 (Semidistancia).— Una semidistancia (semimétrica) sobre un conjunto E es cualquier función (total), $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, que verifica, $\forall x, y, z \in E$:

1. $d(x,x) = 0$;
2. $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$.

Con una semidistancia, por tanto, puede ocurrir $d(x,y) = 0$, siendo $x \neq y$.

0.5.1. Bolas y esferas; conjuntos convexos

Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x_0 \in E$ y $r \in \mathbb{R}$.

Definición 0.20.— Una *bola abierta* (o simplemente bola) de centro x_0 y radio r es el conjunto $\{x \in E : d(x,x_0) < r\}$; lo notamos $B(x_0,r)$. Una *bola cerrada* de centro x_0 y radio r es el conjunto $\{x \in E : d(x,x_0) \leq r\}$; lo notamos $\overline{B}(x_0,r)$ o $B[x_0,r]$. Llamamos *esfera* de centro x_0 y radio r al conjunto $S(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) = r\}$.

Definición 0.21.— Entendemos por perforar o agujerear una bola, privarle de su centro; así, una *bola abierta perforada* es el conjunto $B^*(x_0,r) = B(x_0,r) - \{x_0\}$.

Definición 0.22.— Decimos que A es *convexo* en (E,d) si, y sólo si, $(\forall x, y \in A)(\forall \lambda \in (0,1))(\lambda x + (1-\lambda)y \in A)$.

Ejemplo 10.

Sea $(\mathbb{R},d)$: $B(x_0,r) = (x_0 - r, x_0 + r)$; $B[x_0,r] = [x_0 - r, x_0 + r]$; $S(x_0,r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$.

Ejemplo 11.

Sea (E,d_d) (métrica discreta):

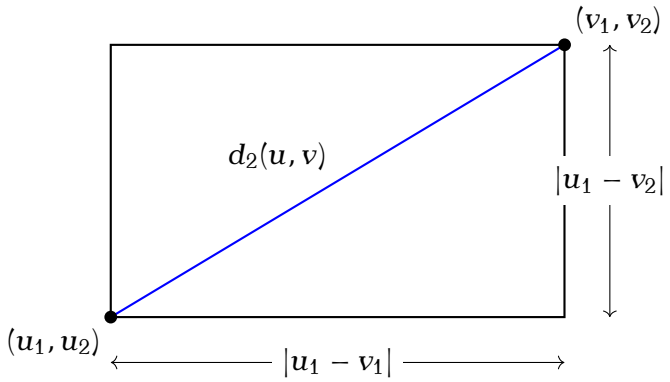
$$B(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & (r \leq 1) \\ E & (r > 1) \end{cases}; \quad B[x_0,r] = \begin{cases} \{x_0\} & (r < 1) \\ E & (r \geq 1) \end{cases}$$

0.5.2. Algunas distancias en el plano real

Definición 0.23 (Distancia Euclídea).— La distancia euclídea (conocida también como distancia diagonal), $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define, para todo $u(u_1,u_2), v(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ por

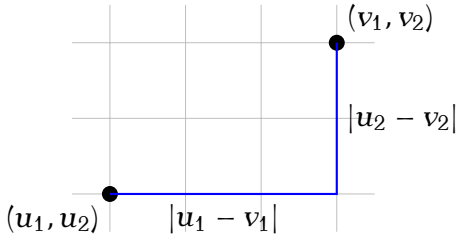
$$d_2(u,v) = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2}.$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'



Definición 0.24 (Distancia de Manhattan).— La distancia de Manhattan (conocida también como distancia del taxista, distancia del valor absoluto, distancia de la cuadrícula, distancia del polígono industrial), $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define, para todo $u(u_1, u_2), v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ por

$$d_1(u, v) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|.$$



En arquitectura es utilizada en urbanismo y en informática en el diseño de circuitos impresos.

Definición 0.25 (Distancia del supremo).— La distancia del supremo (conocida también en dimensión finita como distancia del máximo), $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define, para todo $u(u_1, u_2), v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ por

$$d_\infty(u, v) = \sup\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\}.$$

Forma geométrica de las bolas

A continuación indicamos tres lugares geométricos en $\mathbb{R}^2$, que no son más que tres bolas cerradas en los espacios métricos $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

- En $(\mathbb{R}^2, d_1)$: $B_1[(x_0, y_0), r] = \{(x, y) : |x - x_0| + |y - y_0| \leq r\}$, lo que corresponde a un rombo (Fig. 2.7).
- En $(\mathbb{R}^2, d_2)$: Corresponde al círculo cerrado (círculo + circunferencia) (Fig. 2.8).
- En $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$: $B_\infty[(x_0, y_0), r] = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$, es decir, el cuadrado (Fig. 2.9).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

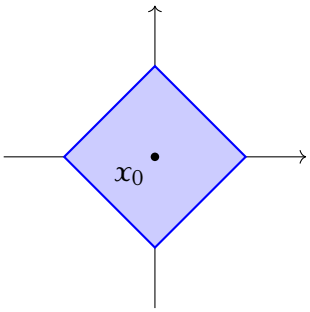


Fig. 2.7 (d_1)

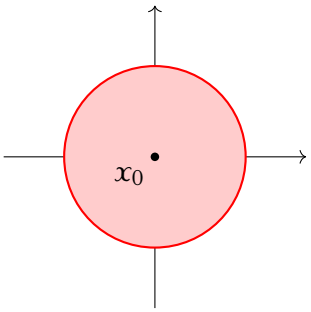


Fig. 2.8 (d_2)

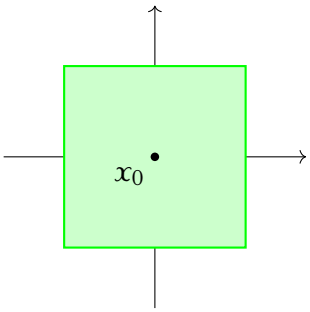


Fig. 2.9 (d_∞)

Sea $d_p((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \sqrt[p]{|u_1-v_1|^p+|u_2-v_2|^p}$. La Fig. 2.10 muestra la apariencia de las bolas, a medida que aumenta el valor de p ($\forall p \in \mathbb{R}, p \geq 1$). Cuanto mayor es p, mayor es la bola correspondiente; la menor de todas $\overline{B}_1$, y la mayor de todas, $\overline{B}_\infty$.

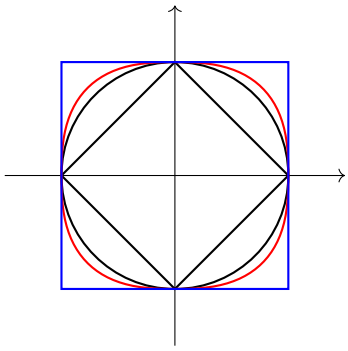


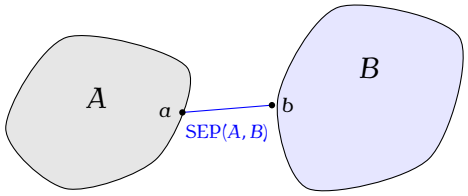
Fig. 2.10 (Cuando mayor es p, más cerca del cuadrado está $\overline{B}_p$)

0.5.3. Separación entre conjuntos y acotación

Definición 0.26.— Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $A,B \subseteq E$. Entendemos por *separación* entre dos conjuntos A y B a

$$\text{SEP}(A,B) = \text{ínf}\{d(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

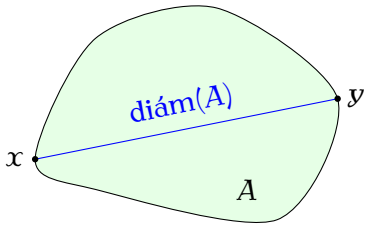
SEP no es una distancia.



Definición 0.27.— Como caso particular de la anterior definición, siendo A o B un conjunto unitario, definimos la *separación entre un punto y un conjunto* como $\text{SEP}(\{x\},A) = \text{ínf}\{d(x,a) \mid a \in A\}$.

Definición 0.28.— Sea $A \subseteq E$, llamamos *diámetro* de A y notamos diám(A) al supremo en $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$. ($\overline{\mathbb{R}}$ es la recta real ampliada, con dos nuevos números: menos y más infinito). Decimos que un conjunto es *acotado* si, y sólo si, su diámetro es finito. Convenimos en que diám$(\emptyset) = 0$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'



Teorema 13 (*Propiedades de conjuntos acotados*).— $(\forall A, B \subseteq E)$
1. $A \subseteq B \to \text{diám}(A) \leq \text{diám}(B)$
2. A es acotado en $(E,d) \leftrightarrow (\exists x \in E)(\exists r \in \mathbb{R}^+)(A \subseteq B(x,r))$
3. La unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.

Demostración.— 1: [✍];
2: basta coger $x \in A$ y $r > \text{diám}(A)$.
3: En efecto, si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, entonces, $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(A_1) + \cdots + \text{diám}(A_n)$ + distancias entre ellos, que al ser una suma finita de números reales, es también un número real. ■

Ejemplo 12.

La unión infinita de acotados no tiene por qué ser acotado; $\mathbb{Z}^+ = \{1\} \cup \{2\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \ldots$ es unión infinita de conjuntos acotados (diámetro 0) y sin embargo $\mathbb{Z}^+$ no es acotado.

Ejemplo 13.

Sea un espacio métrico (E,d). Veamos que $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \text{SEP}(A,B) = 0$; en efecto, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B)(a = b) \Rightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B)(d(a,b) = 0) \Rightarrow \text{SEP}(A,B) = 0$ (además se alcanza el ínfimo, precisamente en esos puntos a y b). El recíproco no es cierto, por ejemplo, si $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$, entonces, $\text{SEP}(A,B) = 0$ siendo $A \cap B = \emptyset$. Esto último entronca con el concepto de *conjuntos tangentes*, que precisamente podríamos definir como aquéllos que verifican $A \cap B = \emptyset$ y $\text{SEP}(A,B) = 0$.

Ejemplo 14.

Pudiésemos pensar que la separación entre un conjunto y su complementario es cero. Pero ello es falso. Pensemos en el espacio métrico $(\{1,2\}, d_d)$; sea $A = \{1\}$, entonces, $E \setminus A = \{2\}$ y $\text{SEP}(\{1\},\{2\}) = 1$.

Ejemplo 15.

Consideremos $(\mathbb{R},d)$, entonces: $\text{diam}((a,b)) = \text{diam}([a,b)) = \text{diam}((a,b]) = \text{diam}([a,b]) = |a-b| = \text{diam}((a,c) \cup (d,b))$, siendo $a < c < d < b$.

0.5.4. Espacio métrico producto. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Sean dos espacios métricos, (E_1,δ_1) y (E_2,δ_2). Se trata de construir el espacio métrico producto, de conjunto soporte $E_1 \times E_2$ y distancia, $\delta_\times$, la determinada por el siguiente teorema.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 14 (*Distancias producto de dos espacios*).— Sean dos espacios métricos (E_1, δ_1) y (E_2, δ_2). Las siguientes funciones $\delta_\times : (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) \to \mathbb{R}$, definidas como $\delta_\times(u, v) = \delta_\times((u_1, u_2), (v_1, v_2)) =$

1. $d_1(u, v) = \delta_1(u_1, v_1) + \delta_2(u_2, v_2)$;
2. $d_2(u, v) = \sqrt{(\delta_1(u_1, v_1))^2 + (\delta_2(u_2, v_2))^2}$
3. $d_\infty(u, v) = \max\{\delta_1(u_1, v_1), \delta_2(u_2, v_2)\}$;

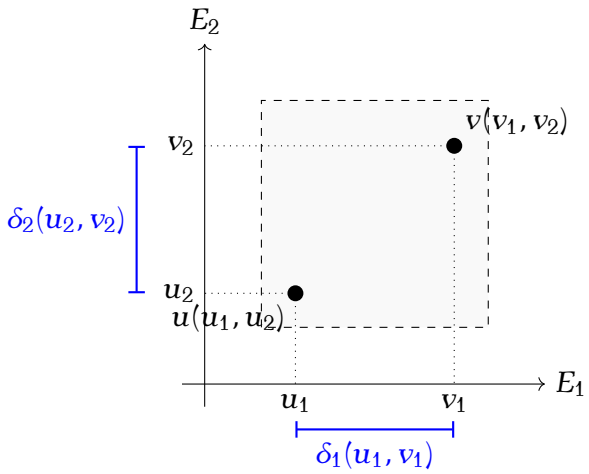
son distancias en el espacio producto $E_1 \times E_2$.

Demostración.— (1):

(d.1) $d_1(u, v) = 0 \leftrightarrow \delta_1(u_1, v_1) + \delta_2(u_2, v_2) = 0$. Como las distancias son no negativas, esto implica que $\delta_1(u_1, v_1) = 0$ y $\delta_2(u_2, v_2) = 0$. Al ser δ_1, δ_2 distancias, $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$, luego $u = v$.

(d.2) La simetría es inmediata por la simetría de δ_1 y δ_2: $d_1(u, v) = \delta_1(u_1, v_1) + \delta_2(u_2, v_2) = \delta_1(v_1, u_1) + \delta_2(v_2, u_2) = d_1(v, u)$.

(d.3) Sean $u, v, w \in E_1 \times E_2$. $d_1(u, w) = \delta_1(u_1, w_1) + \delta_2(u_2, w_2) \leq$ (por desig. triangular en E_1 y E_2) $\leq [\delta_1(u_1, v_1) + \delta_1(v_1, w_1)] + [\delta_2(u_2, v_2) + \delta_2(v_2, w_2)] = = [\delta_1(u_1, v_1) + \delta_2(u_2, v_2)] + [\delta_1(v_1, w_1) + \delta_2(v_2, w_2)] = d_1(u, v) + d_1(v, w)$.



(2) y (3): [✍]. ■

Teorema 15 (*Distancia producto de n espacios*).— Sean $(E_1, \delta_1), (E_2, \delta_2), \ldots, (E_n, \delta_n)$ espacios métricos. En el conjunto producto $E = \prod_{i=1}^n E_i$ se definen las distancias:

1. $d_1(u, v) = \sum_{i=1}^n \delta_i(u_i, v_i)$;
2. $d_2(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\delta_i(u_i, v_i))^2}$;
3. $d_\infty(u, v) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\delta_i(u_i, v_i)\}$;

todas ellas distancias en el espacio producto $\times_{i=1}^n E_i$.

Demostración.— La demostración de que estas funciones son distancias se realiza por inducción sobre n o generalizando directamente los pasos de la demostración para $n = 2$ utilizando las propiedades de las sumatorias y la desigualdad de Minkowski para el caso de d_2. ■

0.5.5. Conjuntos abiertos y cerrados. Entornos.

Definición 0.29.— Sea $A \subseteq E, A \neq \emptyset$; A es *abierto* $\leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x, r) \subseteq A)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 16.

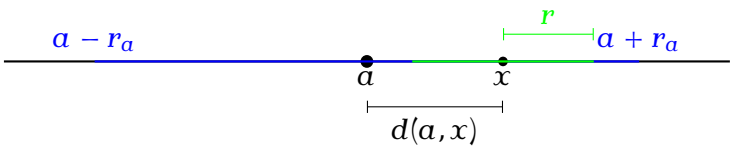
Sea (E, d_d). Cualquier subconjunto $A \subseteq E$ es abierto, pues $(\forall x \in A)(\exists r \leq 1 \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq A)$.

Ejemplo 17.

$\mathbb{R}^-$ es abierto de $(\mathbb{R}, d_{||})$, pues $(\forall x \in \mathbb{R}^-)(\exists r = \text{mín}\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\} \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq A)$.

Teorema 16.—
1. Toda bola abierta es un conjunto abierto.
2. Todo intervalo abierto de $(\mathbb{R}, d_{||})$ es un conjunto abierto.

Demostración.— (1) Veamos dos esquemas de demostración, el primero de ellos, en base al centro de la bola.
Sea $B(a, r_a)$ y $x \in B(a, r_a)$. Si $x \in (a - r_a, a]$, interesa que $r \leq |(a - r_a) - x|$, de forma que la bola $B(x,r)$ «no se salga» de la bola original $B(a, r_a)$, «por el lado» de $a - r_a$; si $x \in [a, a + r_a)$, y por motivos similares, interesa que $r \leq |x - (a + r_a)|$.
De este modo, podemos asegurar que: $B(x,r) \subseteq B(a, r_a)$.



Observemos que esta elección de r, razonando sobre el centro, puede condensarse en $r \leq r_a - d(a,x)$, pues claramente, $B(x, r_a - d(a,x)) \subseteq B(a, r_a)$: si $y \in B(x, r_a - d(a,x))$, por la desigualdad triangular, $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < (r_a - d(a,x)) + d(x,a) = r_a$.

(2) Es inmediato a partir de las definiciones previas. ■

Teorema 17 (*Propiedades de los abiertos*).—
1. $\emptyset$ y E son abiertos.
2. La intersección finita de abiertos es abierto.
3. La unión de una familia cualquiera de abiertos es abierto.

Demostración.— (1): Para $\emptyset$ se trata de un argumento de vacuidad... Respecto al espacio... su complemento es el $\emptyset$.
(2): Si $A \cap B = \emptyset$, es abierto por (1); si $A \cap B \neq \emptyset$, sea $x_0 \in A \cap B$, como A y B son abiertos, $(\exists r_A, r_B \in \mathbb{R}^+)(B(x_0, r_A) \subseteq A \wedge B(x_0, r_B) \subseteq B)$; la bola $B(x_0, r_0)$, donde $r_0 = \text{mín}\{r_A, r_B\}$, es subconjunto de $A \cap B$.
En el caso de una intersección infinita... si $r_0 = 0$, la intersección no es abierto... por ejemplo, $\bigcap(-1/n, 1/n) = \{0\}$, que no es abierto.
(3): Sea $\{O_i, i \in J\}$ una familia de abiertos; si $x \in \bigcup O_i$, entonces, $(\exists i \in J)(x \in O_i)$, y como O_i es abierto, entonces, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq O_i \subseteq \bigcup O_i)$. ■

Teorema 18 (*Primera caracterización de conjunto abierto*).— Sea (E,d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. A es abierto si, y sólo si, A es unión de bolas abiertas.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Definición 0.30.— Un conjunto $A \subseteq E$ es *cerrado* si, y sólo si, su complementario, $E \setminus A$, es abierto.

Teorema 19.—
1. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.
2. Todo intervalo cerrado de $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ es un conjunto cerrado.

Demostración.— (1) Sea $B[a, r_a]$. Demostremos que $E - B[a, r_a]$ es abierto; sea $y \in B(b, r_b)$, veamos que $d(y, a) > r_a$; sabemos que $d(y, b) < r_b \leq d(a, b) - r_a$; por la desigualdad triangular, $d(y, a) \geq d(a, b) - d(y, b) > d(a, b) - (d(a, b) - r_a) = r_a$. ■

Ejemplo 18.

Todo conjunto es cerrado en (E, d_d).

Ejemplo 19.

$\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

Ejemplo 20.

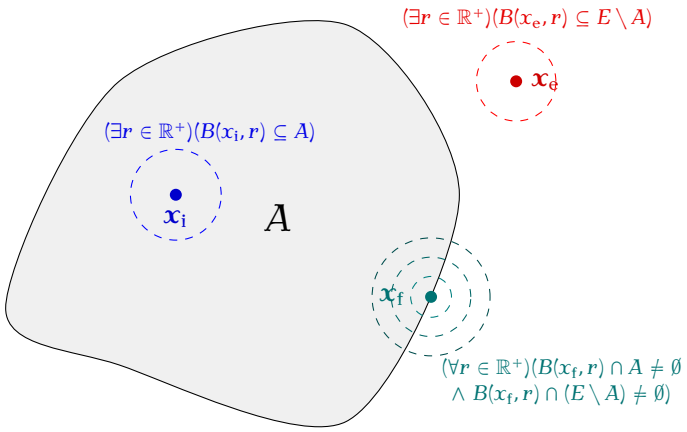
Todo conjunto finito es cerrado en cualquier espacio métrico.

Ejemplo 21.

$\{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ no es ni abierto ni cerrado en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

0.5.6. Puntos interiores, exteriores y frontera.

Sea (E, d) un espacio métrico; clasifiquemos los elementos de E en referencia a un subconjunto determinado del mismo. Observemos la figura:



Distinguiremos tres tipos de puntos, aquéllos que están «dentro» del conjunto, caracterizándolos por poder encontrar una bola centrada en ellos y contenida en el conjunto (puntos interiores); los puntos exteriores serán los que están «fuera» del conjunto (esto es, «dentro» del complementario), y los caracterizaremos por poder encontrar una bola centrada en ellos y contenida en el complementario del conjunto. Finalmente, de otros puntos no podremos decir ni que están

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

«dentro» ni que están «fuera» del conjunto, son los puntos frontera; estos los caracterizamos por el hecho de que cualquier bola centrada en ellos tiene intersección con el conjunto y con el complementario.

Definición 0.31.— Siendo (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ y $x \in E$: x es un *punto interior* de $A \leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq A)$. Al conjunto de puntos interiores de A lo llamamos **interior** de A y suele notarse $\mathring{A}$, $\text{int}(A)$ o A^o (aunque estas dos últimas tienen su razón de ser más en cuestiones tipográficas).

Observación 6.— Pudiésemos haber definido punto interior de A como aquél punto de A, para el que existe algún entorno suyo contenido en A. Por la primera caracterización de conjunto abierto como entorno de todos sus puntos (teorema 2.54), las definiciones por entornos o por bolas son equivalentes. Es por ello por lo que el teorema que sigue es más que evidente.

Teorema 20 (*Caracterización tercera de conjunto abierto*).— $A \subseteq E$ es abierto en (E,d) si, y sólo si, $A = \mathring{A}$.

Teorema 21 (*Algunas propiedades del interior*).— $\forall A, B \subseteq E$:

a. $\mathring{A} \subseteq A$;
b. $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A, concretamente es la unión de todos los abiertos contenidos en A;
c. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$;
d. $A \subseteq B \to \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$;
e. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$;
f. $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$;
g. $x \in \mathring{A} \leftrightarrow \text{SEP}(\{x\}, E \setminus A) > 0$.

Definición 0.32.— Siendo (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ y $x \in E$: $x \in E$ es *punto exterior* de $A \leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq E \setminus A)$. Al conjunto de puntos exteriores de un conjunto A lo llamamos *exterior de* A, y lo notamos $\text{ext}(A)$. Observemos que esta definición corresponde a la de interior de $E \setminus A$, es decir, que $\text{ext}(A) = \text{int}(E \setminus A)$.

Teorema 22 (*Algunas propiedades del exterior*).— $\forall A \subseteq E$:

a. como $\text{ext}(A) = \text{int}(E \setminus A)$, análogamente al caso de $\mathring{A}$: $\text{ext}(A) \subseteq E \setminus A$; etc.
b. $\text{ext}(A)$ es abierto;
c. $x \in \text{ext}(A) \leftrightarrow \text{SEP}(\{x\}, A) > 0$.

Definición 0.33.— Siendo (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ y $x \in E$: $x \in E$ es *punto frontera* de $A \leftrightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset)$. Al conjunto de puntos frontera de A lo llamamos *frontera de* A y lo notamos $\delta(A)$ o $\text{fr}(A)$.

Definición 0.34.— Distinguimos entre *frontera interna y externa*; sus definiciones y notaciones son, respectivamente:

$$\delta_i(A) = \delta(A) \cap A,$$

$$\delta_e(A) = \delta(A) \cap (E \setminus A).$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 23 (*Algunas propiedades de la frontera*).— $\forall A \subseteq E$,
a. $\{\text{int}(A), \text{ext}(A), \delta(A)\}$ es una partición de E;
b. $\delta(A)$ es cerrado;
c. $\delta(A) = \delta(E \setminus A)$;
d. $A = \mathring{A} \cup \delta_i(A)$;
e. $x \in \delta(A) \leftrightarrow \text{SEP}(\{x\}, A) = 0 \wedge \text{SEP}(\{x\}, E \setminus A) = 0$.

Ejemplo 22.

Sea $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ y $A = (a, b]$. Entonces: $\text{int}(A) = (a, b)$, $\text{ext}(A) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ y $\text{fr}(A) = \{a, b\}$.

Ejemplo 23.

Sea $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ y $A = \mathbb{Q}$. Entonces: $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ (pues en cualquier intervalo hay irracionales), $\text{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ (pues en cualquier intervalo hay racionales) y $\text{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Teorema 24 (*Caracterización cuarta de conjunto abierto*).— $A \subseteq E$ es abierto en (E, d) si, y sólo si, $\delta_i A = \emptyset$.

Teorema 25 (*Caracterizaciones segundas de conjunto cerrado*).—
a. $A \subseteq E$ es cerrado en (E, d) si, y sólo si, $\delta_e A = \emptyset$;
b. $A \subseteq E$ es cerrado en (E, d) si, y sólo si, $\delta A \subseteq A$.

Demostración. A es abierto $\leftrightarrow$ (1) $\delta_i(A) = \emptyset \leftrightarrow$ (2) $\delta(A) = \delta_e(A) \leftrightarrow$ (3) $\delta(A) \subseteq E \setminus A$. ■

Teorema 26 (*Caracterización de conjunto abierto y cerrado*).— $A \subseteq E$ es abierto y cerrado $\leftrightarrow \delta(A) = \emptyset$.

Demostración. Es evidente a partir de $\delta(A) = \delta_i(A) \cup \delta_e(A)$ y de los teoremas anteriores. ■

Ejemplo 24.

Como $\delta_i([0, 1)) = \{0\}$, deducimos que $[0, 1)$ no es abierto en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$; por otro lado, como $\delta([0, 1)) = \{0, 1\} \not\subseteq [0, 1)$, obtenemos que $[0, 1)$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

Ejemplo 25.

Sea (E, d_d). $\forall A \subseteq E : \mathring{A} = A, \text{ext}(A) = E \setminus A, \delta(A) = \emptyset$ (puesto que cada punto del espacio puede aislarse en una bola de radio $r \leq 1$).

Observación 7.— Para un cálculo efectivo de la frontera de un conjunto a partir de su interior y exterior, utilizaremos el hecho de ser $\{\mathring{A}, \text{ext}(A), \delta(A)\}$ una partición de E, pues entonces $\delta(A) = E \setminus (\mathring{A} \cup \text{ext}(A))$.

En particular, si $A = (a, b] \cup \{c\}$, entonces:

$$\delta(A) = \mathbb{R} \setminus ((a, b) \cup (-\infty, a) \cup (b, c) \cup (c, +\infty)) = \{a, b, c\}.$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Las fronteras interior y exterior son, respectivamente:

$$\delta_i(A) = \delta(A) \cap A = \{b, c\} \quad \text{y} \quad \delta_e(A) = \delta(A) \cap (E \setminus A) = \{a\}.$$

0.5.7. Adherencia de un conjunto

Definición 0.35 (Punto adherente de un conjunto).— $x \in E$ es *punto adherente* (o, sinónimamente, *punto de cierre* o *punto de clausura*) de A si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$. Al conjunto de puntos adherentes de A lo llamamos adherencia (cierre o clausura) de A, y lo notamos $\mathrm{adh}(A)$ o $\overline{A}$. Observemos que esta definición es equivalente a decir que $x \in \mathrm{adh}(A)$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(\exists a \in A)\,(d(x,a) < r)$.

Teorema 27 (*Propiedades; nueva partición del espacio*).—
1. $\mathrm{adh}(A) = \mathring{A} \cup \delta(A)$;
2. $\{\mathrm{ext}(A), \mathrm{adh}(A)\}$ es una partición de E;
3. $\mathrm{adh}(A) = E \setminus \mathrm{int}(E - A)$; $\mathrm{adh}(E - A) = E \setminus \mathrm{int}(A)$;
4. $\delta(A) = \mathrm{adh}(A) \cap \mathrm{adh}(E - A)$.

Demostración.— (1): [$\subseteq$]: $x \in \mathrm{adh}(A) \Leftrightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$; ahora bien, ocurre $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset)$, en cuyo caso, $x \in \delta(A)$, o bien, ocurre que $(\exists r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap (E \setminus A) = \emptyset)$, en cuyo caso, $x \in \mathring{A}$.
[$\supseteq$]: $x \in \mathring{A} \Rightarrow x \in A \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(x \in B(x,r) \cap A) \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in \mathrm{adh}(A)$. Por otro lado, y por definición de frontera, si $x \in \delta(A)$, entonces, $x \in \mathrm{adh}(A) \wedge x \in \mathrm{adh}(E \setminus A)$.
(2) y (3): Triviales, por ser $\{\mathrm{ext}(A), \mathrm{int}(A), \delta(A)\}$ una partición de E.
(4): [✍]. ■

Ejemplo 26.

(¡Ojo!) Este teorema permite el cálculo automático de $\mathrm{adh}(A)$ conocidos $\mathring{A}$ y $\delta(A)$ ó $\mathrm{ext}(A)$, respectivamente. En particular, si $A =]a,b] \cup \{c\}$:

$$\mathrm{adh}(A) = \mathring{A} \cup \delta(A) = (a,b) \cup \{a,b,c\} = [a,b] \cup \{c\};$$
$$\mathrm{adh}(A) = \mathbb{R} - \mathrm{ext}(A) = \mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b,c) \cup (c, +\infty)) = [a,b] \cup \{c\}.$$

Ejemplo 27.

Sean el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y el conjunto $A = \{(x, \mathrm{sen}(1/x)) : x \in \mathbb{R}^+\}$ (que no es otra cosa que el grafo de la función $f : \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$, $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$). Dibujándolo, no es difícil comprobar [✍] que $\mathrm{adh}(A) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}$.

Teorema 28 (*Algunas propiedades más de la adherencia*).— $(\forall A, B \subseteq E)\,(\forall x \in E)$
1. $A \subseteq \mathrm{adh}(A)$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{adh}(A) \subseteq \mathrm{adh}(B)$ (monotonía de adh)
3. $\mathrm{adh}(A \cup B) = \mathrm{adh}(A) \cup \mathrm{adh}(B)$;
4. $\mathrm{adh}(A \cap B) \subseteq \mathrm{adh}(A) \cap \mathrm{adh}(B)$;
5. $\mathrm{adh}(A) = \mathrm{adh}(\mathrm{adh}(A))$;
6. $\mathrm{diám}(A) = \mathrm{diám}(\mathrm{adh}(A))$.

Demostración.— (1), (2): [✍];

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

(3): [$\subseteq$]: [✍];
[$\supseteq$]: supongamos que $x \notin \text{adh}(A \cup B)$, entonces, $x \notin \text{adh}(A)$ y $x \notin \text{adh}(B)$, o sea, que existen dos bolas, una, $B(x, r_1)$ que no tiene intersección con A, es decir, que para todo $a \in A$, $d(x,a) > r_1$ y otra, $B(x, r_2)$ que no interseca a B, o sea, que para todo $b \in B$, $d(x,b) > r_2$; sea $r_0 = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, entonces, para todo $z \in A \cup B$, $d(x,z) > r_0$, luego $x \notin \text{adh}(A \cup B)$.
(4): De $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ deducimos, por (2), que $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A)$ y $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(B)$, por lo que, por definición de intersección de conjuntos, $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$. Un ejemplo donde no se da la inclusión contraria: $A = (0,1)$ y $B = [1,2)$, pues, $\text{adh}(A) = [0,1]$, $\text{adh}(B) = [1,2]$, $\text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) = \{1\} \nsubseteq \emptyset = \text{adh}(\emptyset) = \text{adh}(A \cap B)$.
(5): Por (1), tenemos $\text{adh}(A) \subseteq \text{adh}(\text{adh}(A))$; veamos la inclusión contraria, $\text{adh}(\text{adh}(A)) \subseteq \text{adh}(A)$: $x \in \text{adh}(\text{adh}(A))$ si, y sólo si, $(\forall r_1 \in \mathbb{R}^+)\,(B(x, r_1) \cap \text{adh}(A) \neq \emptyset)$, esto es, existe algún $y \in \text{adh}(A)$, tal que $d(x,y) < r_1$, pero $y \in \text{adh}(A)$ si, y sólo si, $(\forall r_2 \in \mathbb{R}^+)\,(B(y, r_2) \cap A \neq \emptyset)$, esto es, existe algún $z \in A$, tal que $d(y,z) < r_2$; sea $r_0 = 2\text{máx}\{r_1, r_2\}$, entonces, $d(x,y) < r_0/2$ y $d(y,z) < r_0/2$; por la desigualdad triangular, $d(x,z) < r_0$; es decir, hemos concluido que $\forall r_0 \in \mathbb{R}^+$, existe algún $z \in A$, tal que $d(x,z) < r_0$, o sea, $(\forall r_0 \in \mathbb{R}^+)\,(B(x, r_0) \cap A \neq \emptyset)$, esto es, $x \in \text{adh}(A)$ [las cuantificaciones $\forall r_1 \in \mathbb{R}^+$ y $\forall r_2 \in \mathbb{R}^+$ implican la cuantificación $\forall r_0 \in \mathbb{R}^+$].
(6): [$\leq$]: $A \subseteq \text{adh}(A) \to \text{diám}(A) \leq \text{diám}(\text{adh}(A))$;
[$\geq$]: si $x, y \in \text{adh}(A)$, entonces $\forall r \in \mathbb{R}^+$, existen $a, b \in A$ tales que $d(x,a) < r$ y $d(y,b) < r$ [por tener la bola intersección con A]; como $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$ [por la desigualdad triangular], sustituyendo aquéllas en ésta, $d(x,y) < r + d(a,b) + r = d(a,b) + 2r \leq \text{diám}(A) + 2r$; es decir, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(d(x,y) < \text{diám}(A) + 2r)$, en particular, para r tan pequeño como queramos, por lo que $d(x,y) \leq \text{diám}(A)$, para cualesquiera $x, y \in \text{adh}(A)$, de donde $\text{diám}(\text{adh}(A)) = \sup\{d(x,y) : x, y \in \text{adh}(A)\} \leq \text{diám}(A)$. ■

Teorema 29 (*Primera caracterización de la adherencia*).—
1. $x \in \text{adh}(A) \leftrightarrow \text{SEP}(\{x\}, A) = 0$ (x está «tan próximo» a A que la distancia entre ambos es cero);
2. $\text{SEP}(\{x\}, A) = \text{SEP}(\{x\}, \text{adh}(A))$.

Demostración.— (1): [$\to$]: Supongamos que $\text{SEP}(\{x\}, A) \neq 0$, por definición de SEP, esto significa que el $\text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\} \neq 0$, o lo que es lo mismo, por definición de ínfimo, $(\exists r_0 \in \mathbb{R}^+)\,(\forall a \in A)\,(d(x,a) > r_0)$; la bola $B(x, r_0) = \{z \in E : d(x,z) < r_0\}$ no tiene intersección con A, por lo que $x \notin \text{adh}(A)$.
[$\leftarrow$]: Por definición de ínfimo, $\text{SEP}(\{x\}, A) = 0$, significa que $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(\exists a \in A)\,(d(x,a) < r)$, lo que equivale a $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(\exists a \in A)\,(a \in B(x,r))$, por tanto, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$, de donde, $x \in \text{adh}(A)$.
(2): [✍]. ■

Teorema 30 (*Segunda caracterización de la adherencia*).— $\text{adh}(A)$ es el menor cerrado que contiene a A (concretamente la intersección de todos los cerrados que contienen a A).

Demostración.— Sea $B \supseteq A$, B cerrado de (E,d), demostremos que $\text{adh}(A) \subseteq B$. Por definición de cerrado, esto equivale a demostrar que $(\forall B \supseteq A)\,(E \backslash B \text{ abierto } \to E \backslash B \subseteq E \backslash \text{adh}(A))$. Veámoslo: por definición de abierto, $E \backslash B$ es abierto si, y sólo si, $(\forall x \in E \backslash B)\,(\exists r_0 \in \mathbb{R}^+)\,(B(x, r_0) \subseteq E \backslash B)$; por otro lado, $B \supseteq A \to E \backslash B \subseteq E \backslash A$, por lo que la bola está contenida en el complementario de A, por lo que $(\forall x \in E \backslash B)\,(\exists r_0 \in \mathbb{R}^+)\,(B(x, r_0) \cap A = \emptyset)$, de donde $x \notin \text{adh}(A)$, esto es, $x \in E \backslash \text{adh}(A)$. ■

Teorema 31 (*Tercera caracterización de conjunto cerrado*).— $A \subseteq E$ es cerrado en (E,d) si, y sólo si, $A = \text{adh}(A)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Demostración.— [→]: Veamos que $\mathrm{adh}(A) \subseteq A$, o lo que es equivalente, $E \setminus A \subseteq E \setminus \mathrm{adh}(A)$. Al ser A cerrado, $E \setminus A$ es abierto; sea $z \in E \setminus A$, como existe una bola abierta centrada en z, totalmente contenida in $E \setminus A$, dicha bola no contiene ningún punto de A, por lo que $z \notin \mathrm{adh}(A)$.
[←]: Demostremos que $E \setminus A$ es abierto. Razonemos por reducción al absurdo, dado $z \in E \setminus A$, si no existiese una bola $B(z,r) \subseteq E \setminus A$, significaría que en cualquier bola, centrada en z, habría puntos de A, por lo que $z \in \mathrm{adh}(A)$; pero esto es imposible, pues como $A = \mathrm{adh}(A)$, también es $E \setminus A = E \setminus \mathrm{adh}(A)$: z no puede estar a la vez en $\mathrm{adh}(A)$ y en $E \setminus \mathrm{adh}(A)$. ■

Observación 8.— En un espacio métrico cualquiera, *la adherencia de una bola abierta, está incluida en la bola cerrada del mismo centro y radio*, esto es, $\mathrm{adh}(B(x,r)) \subseteq B[x,r]$. *La igualdad no tiene por qué ser cierta*, basta pensar en un espacio métrico discreto, y en las bolas abiertas $B(x,1) = \{x\}$, iguales a su adherencia y distintas de las bolas cerradas $B[x,1] = E$.
En los espacios $(\mathbb{R}^n, d_E)$, *sí es cierta la igualdad.*

Observación 9.— Como $\mathrm{adh}A = E \setminus \mathrm{ext}(A)$, el teorema anterior caracteriza los cerrados como aquellos conjuntos cuyo exterior es su complementario. Recordemos que el exterior de un conjunto no es más que el interior de su complementario y observemos el paralelismo con la caracterización de abierto por su interior:

$$A \text{ es abierto si, y sólo si, } \mathrm{int}(A) = A;$$
$$A \text{ es cerrado si, y sólo si, } \mathrm{int}(E \setminus A) = E \setminus A.$$

0.5.8. Puntos de acumulación y aislados

Definición 0.36 (Punto de acumulación; conjunto derivado).— $x \in E$ es un *punto de acumulación* de A si, y sólo si, es adherente a $A \setminus \{x\}$, esto es, si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset)$. Al conjunto de puntos de acumulación de A lo llamamos *derivado de* A, siendo usual notarlo $\mathrm{ac}(A)$, A' ó A^d.

Definición 0.37 (Punto aislado).— Aquellos puntos adherentes, que no sean de acumulación, los llamamos *puntos aislados*. Podemos definirlos de la siguiente manera: $x \in E$ es aislado de $A \Leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A = \{x\})$ (esto es, podemos aislarlo encerrándolo en una bola -donde sólo está él). Al conjunto de puntos aislados de A lo llamamos *isla de* A; son habituales las notaciones $\mathrm{is}(A)$, A^s e $I(A)$.

Teorema 32 (*Primeras propiedades; particiones del espacio*).— $\forall A \subseteq E$,
1. $\mathrm{ac}(A) \subseteq \mathrm{adh}(A)$;
2. $\mathrm{adh}(A) = A \cup \mathrm{ac}(A)$;
3. $\delta_e(A) \subseteq \mathrm{ac}(A)$;
4. $\{\mathrm{ac}(A), \mathrm{is}(A)\}$ es una partición de $\mathrm{adh}(A)$;
5. $\{\mathrm{ext}(A), \mathrm{ac}(A), \mathrm{is}(A)\}$ es una partición de E.

Demostración.— (1), (2): [✍];
(3): $x \in \delta_e(A) \leftrightarrow x \in E \setminus A \wedge (\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset)$; si $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, es que en la bola $B(x,r)$ hay algún $y \in A$, e $y \neq x$ (pues $x \in E \setminus A$), por lo que y está en la bola perforada; en definitiva, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset)$.
(4): [✍];
(5): Trivial, a partir de (4). ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 33 (*Acerca de las particiones en espacios sin bolas unitarias*).— En todo espacio métrico, (E,d), que no posea bolas unitarias (esto es, cuyas bolas abiertas contengan al menos dos puntos), se verifica, $\forall A \subseteq E$,
1. $\text{int}(A) \subseteq \text{ac}(A)$;
2. $\text{is}(A) \subseteq \delta_i(A)$.

En particular, se verifica en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ y no se verifica en (E, d_d).

Demostración.— (1): Sabemos que $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \text{adh}(A)$. Sea $x \in \text{int}(A)$, como $\text{int}(A)$ es abierto, existe una bola centrada en x totalmente contenida en A; tal bola tiene, al menos dos puntos de A, por lo que es imposible que $B(x,r) \cap A = \{x\}$. Debido a ello, $x \in \text{adh}(A) \setminus \text{is}(A) = \text{ac}(A)$. (2): Debido al apartado anterior, un punto aislado debe ser de la frontera, como además debe pertenecer al conjunto (por definición de aislado), será de la frontera interior. ■

Observación 10.— En el caso de los espacios métricos a que hace referencia el teorema anterior, aquéllos que no poseen bolas unitarias, y en particular en los espacios euclideos $(\mathbb{R}^n, d_2)$, se verifica el esquema de inclusión entre conjuntos siguiente:

$\text{ext}(A)$	$\text{ac}(A)$	$\text{is}(A)$

$\text{ext}(A)$	$\text{int}(A)$	$\delta_e(A)$	$\delta_i(A)$

$\text{ext}(A)$	$\text{int}(A)$	$\delta(A)$

$\text{ext}(A)$	$\text{adh}(A)$

Observación 11.— ¿$\text{adh}(A) \subseteq \text{ac}(A)$?; pensemos, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ y en $A = \mathbb{Z}$: $\text{adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $\text{ac}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

Observación 12.— La unión que aparece en la igualdad $\text{adh}(A) = A \cup \text{ac}(A)$, no es una unión disjunta, esto es, en general, no podemos «despejar», no es cierta las igualdad $\text{ac}(A) = \text{adh}(A) \setminus A$, ni $A = \text{adh}(A) \setminus \text{ac}(A)$.

Observación 13.— ¿$\text{ac}(A) \subseteq \delta_e(A)$?; pensemos, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, si $A = [1,2]$, $\text{ac}(A) = [1,2]$ y $\delta_e(A) = \emptyset$.

Ejemplo 28.

En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

[EPP 11.11.2024:0.ª.0.A].

Un esquema de resolución.— Llamemos A al conjunto dado. Hallémoslos, razonadamente.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in \mathring{A}$. Por definición de interior, $1/n \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \subseteq A)$, lo que es imposible, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+$, siempre hay puntos de $A^{\complement}$ en la bola, por ejemplo, el punto

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

medio de $1/n$ y el menor entre $1/n + r$ y $1/(n-1)$ no está en A, o sea,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \min\left\{\frac{1}{n} + r, \frac{1}{n-1}\right\}\right) \notin A.$$

Luego, $\mathring{A} = \emptyset$.

Frontera.— Por definición de frontera, $1/n \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(1/n, r) \cap A^{\complement} \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior, todas las bolas de centro $1/n$ tienen intersección con $A^{\complement}$; por otra parte, los centros $1/n$ son de A, por lo que también tienen intersección con A; luego $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in \delta A$. Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ningún $x \in (1/(n+1), 1/n)$ está en la frontera, pues es posible encontrar una bola centrada en x sin intersección con A, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de x a $1/(n+1)$ y a $1/n$, esto es,

$$r < \min\left\{\left|x - \frac{1}{n+1}\right|, \left|x - \frac{1}{n}\right|\right\}.$$

Tampoco, por un razonamiento similar, ningún elemento de $(-\infty, 0)$ ni de $(1, \infty)$ está en la frontera. Para 0, el único número real que nos queda por analizar, la situación es diferente, para él sí que es cierto que sea cual sea la bola centrada en cero tiene intersección con A y con su complementario $A^{\complement}$; en efecto, la tiene con $A^{\complement}$ porque $0 \in A^{\complement}$ y la tiene con A porque dada una bola de centro 0 y radio $r \in \mathbb{R}^+$, todos los $1/n$ con $n > 1/r$ están en dicha bola; por lo que $0 \in \delta A$. En definitiva, $\delta A = A \cup \{0\}$.

Frontera interior.— $\delta_i A = \delta A \cap A = A$.

Frontera exterior.— $\delta_e A = \delta A \cap A^{\complement} = \{0\}$.

Exterior.— $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} \setminus (\mathring{A} \cup \delta A)$, por lo que $\operatorname{ext} A = \mathbb{R} \setminus (\emptyset \cup (A \cup \{0\})) = \mathbb{R} \setminus A \setminus \{0\}$.

Adherencia.— $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A$, por lo que $\overline{A} = \emptyset \cup (A \cup \{0\}) = A \cup \{0\}$.

Isla.— Como $A^s \subseteq A$, nos preguntamos para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/n \in A^s$. Por definición de isla, $1/n \in A^s$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/n, r) \cap A = \{1/n\})$, lo que es posible para cualquier $1/n$, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de $1/n$ al anterior y al posterior a $1/n$, es decir,

$$r < \min\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right|\right\};$$

luego, $A^s = A$.

Acumulación.— Como $\{A', A^s\}$ es una partición de $\overline{A}$, entonces $A' = \overline{A} \setminus A^s = (A \cup \{0\}) \setminus A = \{0\}$. ■

Ejemplo 29.

En el espacio euclideo $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, consideremos el conjunto $A = \{a + 1/n : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces, $\operatorname{ac}(A) = \mathbb{Z}$ e $\operatorname{is}(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. (Hay quienes llaman rayos —discretos— de origen $a + 1$ y fin a, al conjunto $\{a + 1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Ejemplo 30.

En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\left\{23 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$.

[EPP 10.11.2025:I.0.B].

Un esquema de resolución.— Sea E el conjunto dado. Hallémoslos, razonadamente.

Trasladamos el conjunto de 23 a 0; sea $D = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$; observamos que este conjunto es la unión de estos dos: $\left\{\frac{(-1)^{2n}}{2n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ y $\left\{\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$, esto es, de $A = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ y $B = \left\{\frac{-1}{2n-1} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$.

Analicemos la situación para A, pues para B es similar.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/2n \in \mathring{A}$. Por definición de interior, $1/2n \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/2n, r) \subseteq A)$, lo que es imposible, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+$, siempre hay puntos de $A^{\complement}$ en la bola, por ejemplo, el punto medio de $1/2n$ y el menor entre $1/2n + r$ y $1/(2n-2)$ no está en A, o sea,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} + \text{mín}\left\{\frac{1}{2n} + r, \frac{1}{2n-2}\right\}\right) \notin A.$$

Luego, $\mathring{A} = \emptyset$, igualmente $\mathring{B} = \emptyset$, $\mathring{D} = \emptyset$ y $\mathring{E} = \emptyset$ ($23 \notin E$ pues $\frac{(-1)^n}{n} \neq 0$ si $n \in \mathbb{Z}^+$).

Frontera.— Por definición de frontera, $1/2n \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(1/2n, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(1/2n, r) \cap A^{\complement} \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior, todas las bolas de centro $1/2n$ tienen intersección con $A^{\complement}$; por otra parte, los centros $1/2n$ son de A, por lo que también tienen intersección con A; luego $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $1/2n \in \delta A$. Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ningún $x \in (1/(2n+2), 1/2n)$ está en la frontera, pues es posible encontrar una bola centrada en x sin intersección con A, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de x a $1/(2n+2)$ y a $1/2n$, esto es,

$$r < \text{mín}\left\{\left|x - \frac{1}{2n+2}\right|, \left|x - \frac{1}{2n}\right|\right\}.$$

Igual sucede con B.

Tampoco, por un razonamiento similar, ningún elemento de $(-\infty, 1)$ ni de $(1, \infty)$ está en la frontera. Para 0, el único número real que nos queda por analizar, la situación es diferente, para él sí que es cierto que sea cual sea la bola centrada en cero tiene intersección con A y con su complementario $A^{\complement}$; en efecto, la tiene con $A^{\complement}$ porque $0 \in A^{\complement}$ y la tiene con A porque dada una bola de centro 0 y radio $r \in \mathbb{R}^+$, todos los $1/2n$ con $2n > 1/r$ están en dicha bola; por lo que $0 \in \delta A$.

De nuevo, igual sucede con B.

En definitiva, $\delta A = A \cup \{0\}$ y $\delta B = B \cup \{0\}$, de donde, $\delta D = A \cup B \cup \{0\}$ —esto es, $\delta D = D \cup \{0\}$— y $\delta E = E \cup \{23\}$.

Frontera interior.— $\delta_i E = \delta E \cap E = E$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Frontera exterior.— $\delta_e E = \delta E \cap E^{\complement} = \{23\}$.

Exterior.— $\text{ext}E = \mathbb{R} \setminus (\mathring{E} \cup \delta E)$, por lo que $\text{ext}E = \mathbb{R} \setminus (\emptyset \cup (E \cup \{23\})) = \mathbb{R} \setminus E \setminus \{23\}$.

Adherencia.— $\overline{E} = \mathring{E} \cup \delta E$, por lo que $\overline{E} = \emptyset \cup (E \cup \{23\}) = E \cup \{23\}$.

Isla.— Como $A^s \subseteq A$, nos preguntamos para qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1/2n \in A^s$. Por definición de isla, $1/2n \in A^s$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(1/2n, r) \cap A = \{1/2n\})$, lo que es posible para cualquier $1/2n$, pues basta elegir r menor que la menor de las distancias de $1/2n$ al anterior y al posterior a $1/2n$, es decir,

$$r < \text{mín}\left\{\left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right|, \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2}\right|\right\};$$

luego, $A^s = A$.

Igual sucede para B, D y E, esto es, $E^s = E$.

Acumulación.— Como $\{E', E^s\}$ es una partición de $\overline{E}$, entonces $E' = \overline{E} \setminus E^s = (E \cup \{23\}) \setminus E = \{23\}$.. ■

Observación 14.— Cuando el espacio métrico es discreto (tipos 1 ó 2) o contiene algún subespacio métrico discreto, tiene bolas unitarias y entonces, no tiene por qué satisfacerse algunas de las inclusiones anteriores. Por ejemplo, si (E, d_d), $\forall A \subseteq E$, $\text{int}(A) = \text{is}(A) = A$ y $\text{ac}(A) = \delta_i(A) = \emptyset$. Sea la sucesión de intervalos abiertos $\{I_n : n \in \mathbb{N}^*\} = \{(1/(n+1), 1/n) : n \in \mathbb{N}^*\}$; un ejemplo de espacio métrico, que incluye un subespacio métrico discreto, podría ser $\mathbb{R} \setminus \{I_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ con la distancia $d_{|\cdot|}$, que contiene el subespacio métrico $(\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}, d_{|\cdot|})$ que es discreto (tipo 2). Consideremos el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$, entonces, $A = \text{int}(A) \not\subseteq \text{ac}(A) = \{0\}$, $A = \text{is}(A) \not\subseteq \delta_i(A) = \{1\}$.

Ejemplo 31.

(¡Ojo!) Si el espacio métrico es tal que no tiene bolas unitarias, entonces, $\text{is}(A) \subseteq \delta_i(A)$, restringiéndose el espacio de búsqueda a $\delta_i(A)$. Si, por ejemplo, consideramos el conjunto $A =]a, b] \cup \{c\}$ en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, como $\delta_i(A) = \{b, c\}$, investigamos únicamente los puntos b y c:

¿$b \in \text{is}(A)$? No, pues $(\forall r \in \mathbb{R}^+)\,((\text{máx}\{a, b-r\}, b] \subseteq B(b, r) \cap A) \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+)\,(B(b, r) \cap A \neq \{b\})$;
¿$c \in \text{is}(A)$? Sí, pues $(\exists r \in \mathbb{R}^+, r \leq |b - c|)\,(B(c, r) \cap A = \{c\})$.

Por tanto, $\text{is}(A) = \{c\}$.

Respecto al derivado, al ser $\{\text{ac}(A), \text{is}(A)\}$ una partición de $\text{adh}(A)$, deducimos: $\text{ac}(A) = \text{adh}(A) - \text{is}(A)$. Aplicando esto en el ejemplo anterior, obtenemos: $\text{ac}(A) = ([a, b] \cup \{c\}) - \{c\} = [a, b]$.

Ejemplo 32.

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, en $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ o $(\overline{\mathbb{R}}, d_{|\cdot|})$, todos sus puntos son aislados; en el primero no tiene puntos de acumulación, sin embargo, en el segundo, tiene dos, $-\infty$ y $+\infty$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 34 (*Algunas propiedades más*).— $\forall A, B \subseteq E$,
1. $\mathrm{ac}(A)$ es cerrado;
2. $\mathrm{ac}(A \cap B) \subseteq \mathrm{ac}(A) \cap \mathrm{ac}(B)$;
3. $\mathrm{ac}(A \cup B) = \mathrm{ac}(A) \cup \mathrm{ac}(B)$;
4. $\mathrm{ac}(\mathrm{ac}(A)) \subseteq \mathrm{ac}(A)$;
5. $\mathrm{ac}(\mathrm{adh}(A)) = \mathrm{ac}(A)$.

Teorema 35 (*Caracterización de conjunto discreto*).— $A \subseteq E$ es discreto en $(E,d) \Leftrightarrow \mathrm{ac}(A) = \emptyset$.

Teorema 36 (*Cuarta Caracterización de conjunto cerrado*).— $A \subseteq E$ es cerrado en $(E,d) \Leftrightarrow \mathrm{ac}(A) \subseteq A$.

Demostración.— Sabemos que un conjunto es cerrado si, y sólo si, $A = \mathrm{adh}(A)$; además $\mathrm{ac}(A) \subseteq \mathrm{adh}(A)$. ■

Definición 0.38.— Llamamos *conjunto perfecto* a todo conjunto cerrado que no tenga puntos aislados, esto es, que coincida con su conjunto derivado. Así, $[0,1]$ es perfecto, pero $[0,1] \cup \{3\}$, no.

0.5.9. Efectividad en la clasificación de los puntos

Consideremos, por ejemplo, el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{|\,|})$ y el conjunto $A = (a,b] \cup \{c\}$. Tal conjunto genera naturalmente la siguiente partición de $\mathbb{R}$:

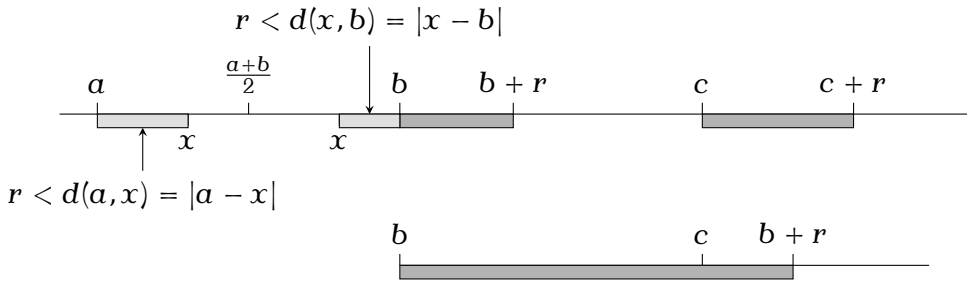
$$\mathbb{R} = (-\infty, a) \cup \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\} \cup (b,c) \cup \{c\} \cup (c, +\infty) = A_1 \cup \cdots \cup A_7,$$

por lo que el problema de cálculo de cualquiera de los conjuntos anteriores $(\mathrm{int}(A), \mathrm{ext}(A), \delta_i(A), \delta_e(A), \mathrm{adh}(A), \mathrm{ac}(A), \mathrm{is}(A))$, equivale a 7 subproblemas (o sea, que en total, tendríamos que resolver $7 \cdot 7 = 49$ problemas). Ya hemos visto que el buen uso de las propiedades anteriores permite restringir el espacio de búsqueda de soluciones y consecuentemente una mayor efectividad en la clasificación de los elementos. Por ejemplo, pensemos en $\mathring{A}$ y $\mathrm{ext}(A)$.

Cálculo del interior.— Como $\mathring{A} \subseteq A$ (int.1), sólo hay que buscar puntos interiores en A, esto es, en los conjuntos señalados con sí:

$$\underset{\text{no}}{(-\infty,a)} \cup \underset{\text{no}}{\{a\}} \cup \underset{\text{sí}}{(a,b)} \cup \underset{\text{sí}}{\{b\}} \cup \underset{\text{no}}{(b,c)} \cup \underset{\text{sí}}{\{c\}} \cup \underset{\text{no}}{(c,+\infty)}$$

¿$(a,b) \subseteq \mathring{A}$? Sí, pues si $x \in (a, \frac{a+b}{2}]$, interesa que $r \leq |x-a|$, de forma que la bola $B(x,r)$ «no se salga» del intervalo (a,b) «por el lado» de la a; si $x \in [\frac{a+b}{2}, b)$, y por motivos similares, interesa que $r \leq |x-b|$; de este modo, podemos asegurar que $B(x,r) \subseteq A$.



©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

¿$\{b\} \subseteq \mathring{A}$? No, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+, (b, \min\{b+r, c\}) \not\subseteq A$, estando incluido en $B(b,r)$.

¿$\{c\} \subseteq \mathring{A}$? No, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+, (c, c+r) \not\subseteq A$, estando incluido en $B(c,r)$.

De todo lo anterior, deducimos que: $\mathring{A} = (a,b)$.

Cálculo del exterior.— Como $\text{ext}(A) = \text{int}(E - A) \subseteq E - A$, sólo hay que buscar puntos exteriores en $E - A$, esto es, en los conjuntos señalados con sí (precisamente, los que en la búsqueda del interior se señalaron con no):

$$\underset{\text{sí}}{(-\infty, a)} \cup \underset{\text{sí}}{\{a\}} \cup \underset{\text{no}}{(a,b)} \cup \underset{\text{no}}{\{b\}} \cup \underset{\text{sí}}{(b,c)} \cup \underset{\text{no}}{\{c\}} \cup \underset{\text{sí}}{(c, +\infty)}$$

El razonamiento es similar a como hicimos con el interior:

- ¿$(-\infty, a) \subseteq \text{ext}(A)$? Sí, porque $(\forall x \in (-\infty, a))(\exists r \in \mathbb{R}^+, r \leq |x - a|)(B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus A)$;
- ¿$\{a\} \subseteq \text{ext}(A)$? No, pues $(\forall r \in \mathbb{R}^+)((a, a+r) \subseteq B(x,r)$ y $(a, a+r) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus A)$;
- ¿$(b,c) \subseteq \text{ext}(A)$? Sí, pues si $x \in (b, \frac{b+c}{2}]$, $r \leq |x - b|$ y si $x \in [\frac{b+c}{2}, c)$, $r \leq |x - c|$, hacen que $B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$.
- ¿$(c, +\infty) \subseteq \text{ext}(A)$? Sí, porque $(\forall x \in (c, +\infty))(\exists r \in \mathbb{R}^+, r \leq |x - c|)(B(x,r) \subseteq \mathbb{R} \setminus A)$;

De todo ello, deducimos que $\text{ext}(A) = (-\infty, a) \cup (b,c) \cup (c, +\infty)$.

0.5.10. Ejercicios resueltos

Cubit 16.

Dados $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, ¿a partir de qué n, $1 - 1/n \in (1 - \delta, 1)$?

Un esquema de resolución.— El objetivo es averiguar a partir de qué $n \in \mathbb{Z}^+$, $1 - \delta < 1 - 1/n < 1$; por una parte, como $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)(1/n > 0)$, entonces $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)(1 - 1/n < 1)$, luego esto lo tenemos; por otra, impongamos la otra desigualdad que queremos conseguir, a saber, que $1 - \delta < 1 - 1/n$, que equivale a $1 + 1/n < 1 + \delta$, esto es, a $1/n < \delta$, es decir, a $1/\delta < n$.

Solución.— A partir de $n = \lceil 1/\delta \rceil$. ■

Observación 15.— La función $\lceil x \rceil$ es la función techo (*ceiling*), definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\lceil x \rceil = p$ si, y sólo si, p es el menor entero mayor o igual que x; igualmente existe la función suelo (*floor*) definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\lfloor x \rfloor = p$ si, y sólo si, p es el mayor entero menor o igual que x; estas dos funciones son importantes, recordémoslas[9].

Observación 16.— Un ejemplo: si $\delta = 0{,}0023$, a partir de $n = 435$, $1 - \delta < 1 - 1/n < 1$, así:

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}0023 = 0{,}9977 &< 1 - 1/435 = 0{,}9977011494\ldots < 1, \\ 1 - 0{,}0023 = 0{,}9977 &< 1 - 1/436 = 0{,}9977064220\ldots < 1, \\ 1 - 0{,}0023 = 0{,}9977 &< 1 - 1/437 = 0{,}9977116704\ldots < 1. \end{aligned}$$

Cubit 17.

¿Cuáles de las siguientes funciones definen una distancia en $\mathbb{R}$?

a. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$;
b. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$;
c. $d(x,y) = \sqrt{|x - y|}$.

[9] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_de_parte_entera.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

[EFO 9.1.2026:I.0.A] (sólo el apdo. b [de manera afirmativa]), [EFE 17.6.2026:I.0.A] (sólo el apdo. b con 5 en vez de 3 [de manera afirmativa]).

Un esquema de resolución.—

a. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ no lo es pues no satisface la exigencia de coincidencia, $x = y \leftrightarrow d(x,y) = 0$; como contraejemplos pudiésemos pensar en números reales opuestos, por ejemplo, sucede que $-1 \neq 1$ y $d(-1,1) = |(-1)^2 - 1^2| = 0$;

b. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ sí lo es; en efecto, satisface las tres exigencias:

   I. *Coincidencia.*

      $\rightarrow$) Si $x = y$, entonces $d(x,y) = |x^3 - y^3| = |x^3 - x^3| = |0| = 0$.

      $\leftarrow$) $d(x,y) = 0$ equivale, por definición de d, a $|x^3 - y^3| = 0$, de donde $x^3 - y^3 = 0$, por lo que $x^3 = y^3$; como la función cúbica $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y, por tanto, inyectiva, deducimos que $x = y$.

   II. *Simetría.—* $d(x,y) = |x^3 - y^3| = |-(x^3 - y^3)|$ [ya que $(\forall r \in \mathbb{R})(|-r| = |r|)$] $= |y^3 - x^3| = d(y,x)$.

   III. *Desigualdad triangular.—* $d(x,z) = |x^3 - z^3| = |(x^3 - y^3) + (y^3 - z^3)|$ [sumando y restando y^3] $\leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3|$ [ya que $(\forall r, s \in \mathbb{R})(|r + s| \leq |r| + |s|)$], en definitiva, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

c. $d(x,y) = \sqrt{|x - y|}$ sí lo es; en efecto, satisface las tres exigencias:

   I. *Coincidencia.—* $d(x,y) = 0 \leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \leftrightarrow |x - y| = 0$ [de elevar al cuadrado ambos miembros] $\leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y$.

   II. *Simetría.—* $d(x,y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|-(x - y)|}$ [ya que $(\forall r \in \mathbb{R})(|-r| = |r|)$] $= \sqrt{|y - x|} = d(y,x)$.

   III. *Desigualdad triangular.—* Por ser el valor absoluto una distancia en $\mathbb{R}$, satisface la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$, esto es, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|,$$

   de donde, por ser la función $f(x) = \sqrt{x}$ creciente[10] en $[0, \infty)$,

$$\sqrt{|x - z|} \leq \sqrt{|x - y| + |y - z|}; \tag{0.1}$$

   por otra parte, como la función $f(x) = \sqrt{x}$ es subaditiva[11] en $[0, \infty)$,

$$\sqrt{|x - y| + |y - z|} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|}; \tag{0.2}$$

   como la relación $\leq$ es transitiva[12] en $[0, \infty)$, de (0.1) y (0.2),

$$\sqrt{|x - z|} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|},$$

   es decir,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \qquad \blacksquare$$

[10] Una función $f : X \longrightarrow Y$ es creciente en X precisamente si $(\forall x, y \in X)(x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$. (Para saber sobre monotonía, *vid. v. gr.* https://en.wikipedia.org/wiki/Monotonic_function).

[11] Una función $f : X \longrightarrow Y$ es subaditiva en X precisamente si $(\forall x, y \in X)(f(x + y) \leq f(x) + f(y))$. (Para saber sobre subaditividad, *vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Subaditividad).

[12] Ser $\leq$ transitiva en $[0, \infty)$ significa que $(\forall x, y, z \in [0, \infty))(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$. (Para saber sobre relaciones transitivas, *vid. v. gr.* https://en.wikipedia.org/wiki/Transitive_relation).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cubit 18.

Sea (E,d) un espacio métrico. Demostremos que son distancias en E:

a. $\triangleright(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$;

b. $\triangleleft(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Un esquema de resolución.—

a. Demostremos que satisface las tres exigencias:

i. *Coincidencia.*

$\rightarrow$) Si $x = y$, entonces $\triangleright(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(x,x)\} = \min\{1,0\}$ [por ser d una distancia en E satisface la exigencia de coincidencia en E] $= 0$.

$\leftarrow$) $\triangleright(x,y) = 0$ equivale, por definición de $\triangleright$, a $\min\{1, d(x,y)\} = 0$, de donde $d(x,y) = 0$, por lo que, por satisfacer d en E la exigencia de coincidencia, $x = y$.

ii. *Simetría.—* $\triangleright(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ [por definición de $\triangleright$] $= \min\{1, d(y,x)\}$ [ya que por ser d una distancia en E satisface la simetría en E] $= \triangleright(y,x)$ [por definición de $\triangleright$].

iii. *Desigualdad triangular.—* Similar a Cubit 17.c.iii; como d es una distancia, sus valores son no negativos; por un lado, la función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \min\{1,x\}$, es creciente[13] y subaditiva[14]; por otro, a partir de la desigualdad triangular de d, aplicaremos f a ambos miembros manteniéndose la desigualdad por ser f creciente, usaremos la subaditividad de f y finalmente por la transitividad de $\leq$ llegaremos a lo buscado [✍].

b. Demostremos que satisface las tres exigencias:

i. *Coincidencia.*

$\rightarrow$) Si $x = y$, entonces $\triangleleft(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(x,x)}{1+d(x,x)} = \dfrac{0}{1+0}$ [por ser d una distancia en E satisface la exigencia de coincidencia en E] $= 0$.

$\leftarrow$) $\triangleleft(x,y) = 0$ equivale, por definición de $\triangleright$, a $\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$, de donde $d(x,y) = 0$, por lo que, por satisfacer d en E la exigencia de coincidencia, $x = y$.

ii. *Simetría.—* $\triangleleft(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ [por definición de $\triangleleft$] $= \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}$ [ya que por ser d una distancia en E satisface la simetría en E] $= \triangleleft(y,x)$ [por definición de $\triangleleft$].

iii. *Desigualdad triangular.—* Similar a Cubit 17.c.iii y Cubit 18.a.iii: por un lado, la función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, es creciente[15] y subaditiva[16]; por otro, a partir de la desigualdad triangular de d, aplicaremos f a ambos miembros manteniéndose la desigualdad por ser f creciente, usaremos la subaditividad de f y finalmente por la transitividad de $\leq$ llegaremos a lo buscado [✍]. ■

[13] La función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \min\{1,x\}$ es creciente ya que si $x < y$, entonces $\min\{1,x\} \leq \min\{1,y\}$ (la igualdad se da si $x,y \leq 1$).

[14] La función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \min\{1,x\}$ es subaditiva; en efecto, sean $x,y \in [0,\infty)$: si $x+y < 1$, entonces $x < 1$, $y < 1$, $f(x) = x$, $f(y) = y$ y $f(x+y) = x+y$, luego $f(x+y) = f(x) + f(y)$; si $x+y \geq 1$, $f(x+y) = 1$, entonces: si $x,y < 1$, $f(x)+f(y) = x+y \leq 1 = f(x+y)$; si $x \geq 1$ o $y \geq 1$, bien $f(x)$ o $f(y)$ es 1 y el otro mayor o igual que cero, luego $f(x)+f(y) \geq 1 = f(x+y)$.

[15] En realidad, la función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$; en efecto, si $x < y$, entonces $f(x) - f(y) = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y} = \dfrac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \cdots = \dfrac{x-y}{(1+x)(1+y)} < 0$, esto es, $f(x) < f(y)$.

[16] La función $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ es subaditiva en $[0,\infty)$; para ello, deduzcamos que $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ demostrando que $f(x)+f(y)-f(x+y) \geq 0$; en efecto, $f(x)+f(y)-f(x+y) = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y} - \dfrac{x+y}{1+x+y} = \cdots = \dfrac{xy(x+y+2)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)} \geq 0$, pues $x,y \geq 0$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cubit 19.

Hallemos las bolas abiertas perforadas $B^*(x_0,r)$, las bolas cerradas perforadas $B^*[x_0,r]$ y las esferas $S(x_0,r)$ en (E,d_d) (recordemos: $r\in\mathbb{R}^+$).

Un esquema de resolución.— Recordemos cuáles son la bola abierta y la bola cerrada de centro x_0 y radio r:

$$B(x_0,r)=\begin{cases}\{x_0\} & \text{si } r\leq 1,\\ E & \text{si } r>1.\end{cases}$$

$$B[x_0,r]=\begin{cases}\{x_0\} & \text{si } r<1,\\ E & \text{si } r\geq 1.\end{cases}$$

Por lo tanto, es la esfera de centro x_0 y radio r ésta:

$$S(x_0,r)=B[x_0,r]-B(x_0,r)=\left\{\begin{array}{ll}\{x_0\}-\{x_0\} & \text{si } r<1,\\ E-\{x_0\} & \text{si } r=1,\\ E-E & \text{si } r>1.\end{array}\right\}=\begin{cases}E-\{x_0\} & \text{si } r=1,\\ \emptyset & \text{si } r\neq 1.\end{cases}$$

Por otra parte, son la bola abierta perforada y la bola cerrada perforada de centro x_0 y radio r éstas:

$$B^*(x_0,r)=B(x_0,r)-\{x_0\}=\left\{\begin{array}{ll}\{x_0\}-\{x_0\} & \text{si } r\leq 1,\\ E-\{x_0\} & \text{si } r>1.\end{array}\right\}=\begin{cases}\emptyset & \text{si } r\leq 1,\\ E-\{x_0\} & \text{si } r>1.\end{cases}$$

$$B^*[x_0,r]=B[x_0,r]-\{x_0\}=\left\{\begin{array}{ll}\{x_0\}-\{x_0\} & \text{si } r<1,\\ E-\{x_0\} & \text{si } r\geq 1.\end{array}\right\}=\begin{cases}\emptyset & \text{si } r<1,\\ E-\{x_0\} & \text{si } r\geq 1.\end{cases}$$ ■

Cubit 20.

Demostremos que una bola abierta es un conjunto convexo.

Un esquema de resolución.— La cuestión es: si $x,y\in B(x_0,r)$, ¿entonces $\forall\lambda\in(0,1)$, $(1-\lambda)x+\lambda y\in B(x_0,r)$? Veamos: $|((1-\lambda)x+\lambda y)-x_0|=|(1-\lambda)(x-x_0)+\lambda(y-x_0)|\leq(1-\lambda)|x-x_0|+\lambda|y-x_0|$ [porque valor absoluto satisface la desigualdad triangular] $<(1-\lambda)r+\lambda r$ [ya que $x,y\in B(x_0,r)$ si, y sólo si, $|x-x_0|<r$ e $|y-x_0|<r$] $=r$; en definitiva, $|((1-\lambda)x+\lambda y)-x_0|<r$, esto es, $(1-\lambda)x+\lambda y\in B(x_0,r)$. ■

Cubit 21.

Representemos en $\mathbb{R}^2$ las esferas de centro $(0,0)$ y radio 1 para las distancias de Manhattan (d_1) y de Chebyshev (d_∞).

[EFO 21.1.2025:I.0.A].

Un esquema de resolución.—

I. La distancia de Manhattan se define, $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, por $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$; por lo tanto,

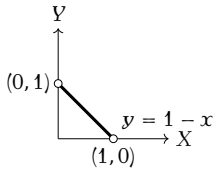
$$\begin{aligned}S_1((0,0),1)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:d_1((x,y),(0,0))=1\right\}\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x-0|+|y-0|=1\right\}\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|+|y|=1\right\};\end{aligned}$$

restringiendo al primer cuadrante, esto es, siendo $|x|=x$ e $|y|=y$, la esfera restringida a este cuadrante es

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

- $S_1((0,0),1)\big|_{x,y>0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y = 1\}$ (primer cuadrante),

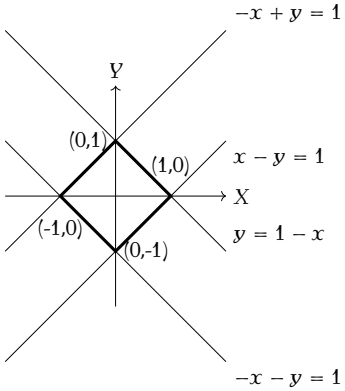
esto es, el segmento abierto (de la recta $y = 1 - x$) de extremos $(0,1)$ y $(1,0)$:



Las restricciones a los demás cuadrantes son los segmentos abiertos:

- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x<0\\y>0}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0, -x + y = 1\}$ (segundo cuadrante),
- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x<0\\y<0}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0, -x - y = 1\}$ (tercer cuadrante) y
- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x>0\\y<0}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0, x - y = 1\}$ (cuarto cuadrante),

que precisamente son los términos en sucesión de las simetrías axiales entre cuadrantes $I \mapsto II \mapsto III \mapsto IV$. A estos puntos añadimos los situados en los ejes: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ (cuya distancia d_1 a $(0,0)$ también es 1).
En definitiva, $S_1((0,0),1)$ es el borde del rombo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$:



II. La distancia de Chebyshev se define, $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, por $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sup\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y),(0,0)) = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\{|x-0|, |y-0|\} = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} = 1\right\}, \end{aligned}$$

pues para un conjunto finito, el supremo coincide con el máximo; restringiendo al primer cuadrante, esto es, siendo $|x| = x$ e $|y| = y$, la esfera restringida a este cuadrante es

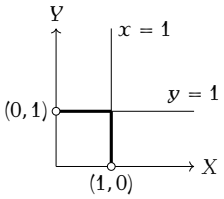
$$S_\infty((0,0),1)\big|_{x,y>0} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \text{máx}\{x,y\} = 1\right\} \text{ (primer cuadrante);}$$

como $\text{máx}\{x,y\} = 1$ si, y sólo si, $x = 1$ e $y \leq 1$, o $x \leq 1$ e $y = 1$, entonces

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1)\big|_{x,y>0} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x = 1, y \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq 1, y = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 < y \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = 1\right\} \end{aligned}$$

esto es, los lados derecho y superior del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$:

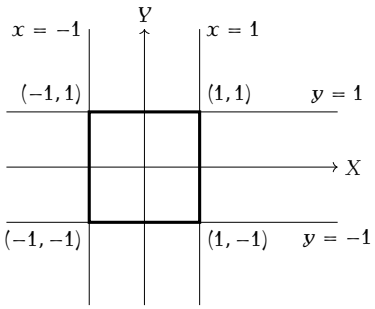
 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/



Ahora, por simetrías entre cuadrantes:

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1) &= \text{lados derecho y superior de } [0,1]\times[0,1] && (1^{er}\text{ cuadrante})\\ &\cup \text{lados izquierdo y superior de } [-1,0]\times[0,1] && (2^{o}\text{ cuadrante})\\ &\cup \text{lados izquierdo e inferior de } [-1,0]\times[-1,0] && (3^{er}\text{ cuadrante})\\ &\cup \text{lados derecho e inferior de } [0,1]\times[-1,0] && (4^{o}\text{ cuadrante})\\ &= \text{lados de } [-1,1]\times[-1,1]. \end{aligned}$$

A estos puntos añadimos los situados en los ejes: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ (cuya distancia d_∞ a $(0,0)$ también es 1):



En definitiva, $S_\infty((0,0),1)$ es el borde del cuadrado de centro $(0,0)$ y lado de longitud 2. ■

Cubit 22.

Demostremos que SEP no es, en general, una distancia.

Un esquema de resolución.— Dado un espacio métrico (E,d), debemos demostrar que $\mathrm{SEP}(A,B) = \inf d(a,b) : a\in A\wedge b\in B$ no es una distancia entre conjuntos; recordemos que la definición de distancia no permite que ésta sea cero entre conjuntos distintos, sin embargo, si $A\cap B\neq\emptyset$, entonces existe x tal que $x\in A$ y $x\in B$, por lo que en el conjunto de distancias $\{d(a,b) : a\in A\wedge b\in B\}$ estará $d(x,x)$ que será cero por ser d una distancia en E, por lo que el ínfimo de dicho conjunto es cero. ■

Observación 17.— Pensemos en $(\mathbb{R},d_2)$ y en $A=[0,1]$ y $B=[1,2]$, como $A\cap B=\{1\}$, $d_2(1,1)=0\in\{d_2(a,b) : a\in A\wedge b\in B\}$; éste es un *contraejemplo* a la afirmación de que SEP es una distancia entre conjuntos (hemos encontrado dos conjuntos distintos cuya distancia es cero).

Observación 18.— Incluso sucede con conjuntos disjuntos ($A\cap B=\emptyset$); pensemos en $(\mathbb{R},d_2)$ y en $A=(0,1)$ y $B=(1,2)$, aunque son disjuntos, $\mathrm{SEP}(A,B)=\inf\{d(a,b) : a\in A\wedge b\in B\}=0$; éste es otro contraejemplo a la afirmación de que SEP es una distancia entre conjuntos.

Cubit 23.

Comprobemos que si $A\cap B\neq\emptyset$, entonces $\mathrm{SEP}(A,B)=0$, pero que el recíproco no tiene por qué ser cierto (usemos, por ejemplo, los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ en $(\mathbb{R},d_2)$).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.— Esa comprobación la hemos hecho en Cubit 22; con respecto al recíproco, efectivamente no es cierto: los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ son tales que $\mathrm{SEP}((0,1),(1,2)) = \inf\{d(x,y) : x \in (0,1) \wedge y \in (1,2)\} = 0$ [debido a que el extremo superior del primero coincide con el extremo inferior del segundo], pero $(0,1) \cap (1,2) = \emptyset$. ■

Cubit 24.

Encontremos ejemplos en edificación o urbanismo de utilización de la distancia de Chebyshev.

Un esquema de resolución.— Es vuestro, disfrutad con la búsqueda [✍] (por ejemplo, hay un tutorial de `DataCamp` que proporciona algunas pistas[17]). ■

Cubit 25.

Representemos con Sage en $\mathbb{R}^2$ las esferas de centro $(0,0)$ y radio 1 para las distancias d_1, d_2, d_3, d_{23} (*cfr.* Práctica UNO., cuestión 3.ª) y d_∞, en colores azul, rojo, verde, púrpura y marrón, respectivamente.

Un esquema de resolución.—

```
var('x,y') # definiendo las variables
implicit_plot(abs(x)^1 + abs(y)^1 - 1, (x, -3, 3), (y, -3, 3), color='
   blue')+implicit_plot(abs(x)^2 + abs(y)^2 - 1, (x, -3, 3), (y, -3, 3),
   color='red')+implicit_plot(abs(x)^3 + abs(y)^3 - 1, (x, -3, 3), (y,
   -3, 3), color='green')+implicit_plot(abs(x)^23 + abs(y)^23 - 1, (x,
   -3, 3), (y, -3, 3), color='purple')+implicit_plot((abs(x)+abs(y)+abs(
   abs(x)-abs(y)))/2-1, (x, -2, 2), (y, -2, 2), color='brown') #
   representando las funciones con los colores propuestos
# por motivos desconocidos combinar implicit_plot y max falla; por esto,
   en el caso de la distancia de Chebyshev hemos usado el resultado
   conocido: máx(x,y) = (x+y+|x-y|)/2
# por cierto, puede calcularse el menor de x e y de forma similar: mín(x.
   y) = (x+y-|x-y|)/2
```

Esto es un ejemplo de implementación en el que hemos ordenado hacer `implicit_plot`; alternativamente, pudiésemos ordenar ejecutar `plot`, quizás más fácil conceptualmente, aunque más extensa su implementación si pretendiésemos el mismo resultado. ■

Cubit 26.

Consideremos $(\mathbb{R}, d_2)$ y tres números reales x, y, z; ¿es cierto que si $x < y$, entonces $d_2(x,z) < d_2(y,z)$?

Un esquema de resolución.— No; la distancia es la del valor absoluto, esto es, $d_2(x,y) = |x-y|$; sí es verdad que si $x < y$, entonces $x - z < y - z$; pero no para el valor absoluto; un contraejemplo: si $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, entonces $d_2(x,z) = |x-z| = |0-2| = 2 \not< 1 = |1-2| = |y-z| = d_2(y,z)$. ■

[17] *Vid.* https://www.datacamp.com/tutorial/chebyshev-distance.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cubit 27.

Representemos en $\mathbb{R}^2$ las bolas y esferas de centro $(0,0)$ y diferentes radios para la distancia d_d (distancia discreta).

Un esquema de resolución.— Con centro genérico (x_0,y_0), las bolas abiertas, cerradas y las esferas son:

$$\begin{aligned}
B_d((x_0,y_0),r<1) &= \{(x_0,y_0)\};\\
B_d[(x_0,y_0),r<1] &= \{(x_0,y_0)\};\\
S_d((x_0,y_0),r<1) &= \emptyset;\\
B_d((x_0,y_0),1) &= (x_0,y_0);\\
B_d[(x_0,y_0),1] &= \mathbb{R}^2;\\
S_d((x_0,y_0),1) &= \mathbb{R}^2-\{(x_0,y_0)\};\\
B_d((x_0,y_0),r>1) &= \mathbb{R}^2;\\
B_d[(x_0,y_0),r>1] &= \mathbb{R}^2;\\
S_d((x_0,y_0),r>1) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Basta sustituir (x_0,y_0) por $(0,0)$ para obtener lo buscado. ■

Cubit 28.

Demostremos que en (E,d_d) todos los conjuntos son abiertos.

Un esquema de resolución.— Si $A\subseteq E$, $A\neq\emptyset$, entonces $(\forall x\in A)(\exists r\in\mathbb{R}^+, r\leq 1)(B(x,r)=x\subseteq A)$; en palabras, para cualquier punto de un conjunto no vacío del espacio, siempre podemos encontrar una bola abierta de centro dicho punto totalmente contenida en el conjunto, pues para ello basta coger un radio menor o igual que 1. ■

Cubit 29.

Estudiemos si el conjunto A es abierto o cerrado en los siguientes casos:

a. $(E,d)=([0,1)\cup(1,2],d_2)$, $A=[0,1]$;
b. $(E,d)=((0,1],d_2)$, $A=\{1/n : n\in\mathbb{Z}^+\}$;
c. $(E,d)=(\mathbb{Q},d_2)$, $A=\{x\in\mathbb{Q} : x<0\vee x^2<2\}$.

[EFE 17.6.2026:I.0.B] (sólo el apdo. b).

Un esquema de resolución.—

a. En realidad, $A=[0,1)$ [ya que $1\notin E$]; $A^{\complement}=(1,2]$; $\mathring{A}=[0,1)$ [toda bola centrada en 0 sólo tiene puntos de A (a la izquierda de 0 no hay nada)], $\delta A=\emptyset$ [el único candidato sería 1, pues toda bola centrada en 1 tiene puntos de A (a la izquierda de 1) y de $A^{\complement}$ (a la derecha de 1), pero $1\notin E$], $\overline{A}=\mathring{A}\cup\delta A=[0,1)\cup\emptyset=[0,1)$; entonces:
   i. como $\mathring{A}=A$, A es abierto;
   ii. como $\overline{A}=A$, A es cerrado;
b. $\mathring{A}=\emptyset$ [toda bola centrada en $1/n$ contiene puntos de $(1/(n+1),1/n)$]; $\delta A=A$ [toda bola centrada en $1/n$ contiene puntos de A (el propio $1/n$) y puntos de $A^{\complement}$ (puntos de $(1/(n+1),1/n)$); $0\notin\delta A$ porque $0\notin E$]; $\overline{A}=\mathring{A}\cup\delta A=\emptyset\cup A=A$; entonces:
   i. como $\mathring{A}\neq A$, A no es abierto;

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

II. como $\overline{A} = A$, A es cerrado;

c. $A^{\complement} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \wedge 2 \leq x^2\}$; $\mathring{A} = A$ [toda bola centrada en $x \in A$ sólo tiene puntos de A (entre puntos de A sólo hay puntos de A)], $\delta A = \emptyset$ [los candidatos son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, pero $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$]; $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A = A \cup \emptyset = A$; entonces:

I. como $\mathring{A} = A$, A es abierto;

II. como $\overline{A} = A$, A es cerrado. ■

Cubit 30.

Proporcionemos ejemplos de conjuntos abiertos, cerrados, abiertos y cerrados y ni abiertos ni cerrados en diferentes espacios métricos (E, d) (diferentes E y diferentes d);

Un esquema de resolución.— Pues eso, buscad, encontrad y coleccionad [✍]. ■

Cubit 31.

En general, si $B \subseteq A$, no tiene por qué ser cierto que $\delta(B) \subseteq \delta(A)$. Comprobémoslo en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ con los conjuntos $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \neq 0\}$.

Un esquema de resolución.— Por una parte, tenemos que $B \subseteq A$ pues $B = A \cap \{(x, y) : x \neq 0\}$; por otra, para tales conjuntos A y B: $\delta(A) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ [circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1] $\subset \delta(B) = \delta(A) \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ [además de la circunferencia anterior, el segmento que une los puntos $(0, -1)$ y $(0, 1)$]. ■

Cubit 32.

Demostremos que si dos conjuntos A y B son tales que $A = \delta(B)$ y $B = \delta(A)$, entonces $A = B$.

Un esquema de resolución.— A y B son conjuntos frontera de un conjunto; como la frontera de un conjunto es un cerrado, $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$, de donde $\delta(A) \subseteq A$ y $\delta(B) \subseteq B$, por lo que $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ y, por lo tanto, $A = B$. ■

Cubit 33.

Siendo A un conjunto en $(\mathbb{R}, d_2)$, ¿$\delta(\delta(A)) = \delta(A)$?

Un esquema de resolución.— No tiene por qué: en $(\mathbb{R}, d_2)$, $\delta(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ y $\delta(\delta(\mathbb{Q})) = \delta(\mathbb{R}) = \emptyset$. ■

Cubit 34.

Hallemos el interior, el exterior, la frontera interior y la frontera exterior de $[0, 1/4)$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.

[EFO 21.1.2025:I.0.B.a–e], [EFE 22.5.2025:I.0.B.a–e], [EFE 20.6.2025:I.0.B.a–e].

Un esquema de resolución.— Llamemos A al conjunto dado. Hallémoslos, razonadamente.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es para qué $x \in A$, $x \in \mathring{A}$. Por definición de interior, $x \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x, r) \subseteq A)$. Si $x \in (0, 1/4)$, basta elegir $r < \text{mín}\{|x - 0|, |x - 1/4|\}$, por lo que $(0, 1/4) \subseteq \mathring{A}$. Si $x = 0$, es imposible, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+$, siempre hay puntos de $A^{\complement}$ en la bola $B(0, r)$, concretamente todos los puntos de $(-r, 0)$. Luego, $\mathring{A} = (0, 1/4)$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Frontera.— Por definición de frontera, $x \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap A^{\complement} \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior: I, si $x \in (0,1/4)$, existen bolas sin intersección con $A^{\complement}$, luego tales puntos no están en δA, y II, todas las bolas de centro 0 tienen intersección con $A^{\complement}$ (y también con A —el propio 0, centro de las bolas—); luego $0 \in \delta A$. Igualmente, todas las bolas de centro $1/4$ tienen intersección con $A^{\complement}$ (ya que $1/4 \notin A$) y tienen intersección con A, concretamente, $B(1/4,r) \cap A = (\text{máx}\{1/4 - r, 0\}, 1/4)$; luego $1/4 \in \delta A$. Por otra parte, ningún $x \in (-\infty, 0)$ está en δA, pues cualquier bola de radio menor que la distancia de x a 0 no tiene intersección con A; sucede también que ningún elemento de $(1/4, \infty)$ está en δA, pues cualquier bola de radio menor que la distancia de x a $1/4$ no tiene intersección con A. En definitiva, $\delta A = \{0, 1/4\}$.

Frontera interior.— $\delta_i A = \delta A \cap A = \{0\}$.

Frontera exterior.— $\delta_e A = \delta A \cap A^{\complement} = \{1/4\}$.

Exterior.— $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus (\mathring{A} \cup \delta A)$, por lo que $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus ((0,1/4) \cup \{0,1/4\}) = \mathbb{R} \setminus [0,1/4] = (-\infty, 0) \cup (1/4, \infty)$. ■

Cubit 35.

Hallemos el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior y la frontera exterior de $[0,1/4)$ en $([0,1), d_2)$.

[EFO 9.1.2026:I.0.B.a–e].

Un esquema de resolución.— En $([0,1), d_2)$, si $A = [0,1/4)$, entonces $A^{\complement} = [1/4, 1)$.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es qué x de A son de $\mathring{A}$; por definición de interior, $x \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq A)$; $0 \in \mathring{A}$ porque en toda bola abierta centrada en 0 de radio menor o igual que $1/4$ sólo hay puntos de A —ya que el espacio es $([0,1), d_2)$—; si $x \in (0,1/4)$, basta que $r < |x - 1/4|$ para que $B(x,r) \subseteq A$; en definitiva, $\mathring{A} = [0,1/4)$.

Frontera.— Por definición de frontera, $x \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap A^{\complement} \neq \emptyset)$; $0 \notin \delta A$ porque en toda bola abierta centrada en 0 de radio menor o igual que $1/4$ no hay puntos de $A^{\complement}$; $1/4 \in \delta A$ porque toda bola abierta centrada en $1/4$ tiene puntos de A (a la izquierda de $1/4$) y puntos de $A^{\complement}$ (a la derecha de $1/4$); si $x \in (0,1/4)$, basta que $r < |x - 1/4|$ para que $B(x,r) \subseteq A$, por lo que no hay puntos de $A^{\complement}$ en $B(x,r)$; si $x \in A^{\complement}$, siempre podremos encontrar una bola $B(x,r) \subset A^{\complement}$ (y, por tanto, sin intersección con A) (basta que $r < |x - 1/4|$, por lo que ningún punto de $A^{\complement}$ está en δA; en consecuencia, $\delta A = \{1/4\}$.

Frontera interior.— $\delta_i A = \delta A \cap A = \{1/4\} \cap [0,1/4) = \emptyset$ (luego $[0,1/4)$ es abierto[18] en $([0,1), d_2)$).

Frontera exterior.— $\delta_e A = \delta A \cap A^{\complement} = \{1/4\} \cap [1/4, 1) = \{1/4\}$ (luego $[0,1/4)$ no es cerrado[19] en $([0,1), d_2)$).

Exterior.— $\text{ext}A = [0,1) \setminus (\mathring{A} \cup \delta A) = [0,1) \setminus ([0,1/4) \cup \{1/4\}) = [0,1) \setminus [0,1/4] = (1/4, 1)$ [por ser $\{\mathring{A}, \delta A, \text{ext}A\}$ una partición de $[0,1)$].

Solución.— $\mathring{A} = [0,1/4)$, $\text{ext}A = (1/4,1)$, $\delta A = \{1/4\}$, $\delta_i A = \emptyset$, $\delta_e A = \{1/4\}$.

[18] Un conjunto es abierto si, y sólo si, su frontera interior es vacía.
[19] Un conjunto es cerrado si, y sólo si, su frontera exterior es vacía.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cubit 36.

En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, hallemos el interior, el exterior, la frontera interior y la frontera exterior de la parábola $y = x^2$.

Un esquema de resolución.— Sea la gráfica de la parábola $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, entonces: $P^\complement = \mathbb{R}^2 \setminus P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$ [todos los puntos del plano que no están en la gráfica (el plano rasgado por la gráfica)]; $\mathring{P} = \emptyset$ [toda bola abierta centrada en $x \in P$ tiene puntos de P (el propio centro de la bola y todos los de la gráfica que «cruzan» la bola [el conjunto intersección de la gráfica con la bola]) y puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus P$ (los puntos de la bola que no están en dicha intersección)]; $\delta P = P$ [porque toda bola centrada en un punto de P tiene intersección con P (la gráfica que cruza la bola) y con $P^\complement$ (los puntos de la bola que no están en dicha intersección)] (luego la gráfica de la parábola es un conjunto cerrado del plano)[20]; $\delta_i P = \delta P \cap P = P \cap P = P$; $\delta_e P = \delta P \cap P^\complement = P \cap P^\complement = \emptyset$; $\mathrm{ext} P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathring{P} \cup \delta P) = \mathbb{R}^2 \setminus P$ [por ser $\{\mathring{P}, \delta P, \mathrm{ext} P\}$ una partición de $\mathbb{R}^2$]. ■

Cubit 37.

En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, hallemos el interior, el exterior, la frontera interior y la frontera exterior del conjunto $\{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$.

Un esquema de resolución.— Sea $C = \{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$; $C = \underline{[0,1)} \times [0,1)$; gráficamente, es el cuadrado relleno $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ sin incluir los lados $\overline{(1,0)(1,1)}$ (derecho) ni $\overline{(0,1)(1,1)}$ (arriba); $\mathring{C} = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} = (0,1) \times (0,1)$ (dicho cuadrado sin incluir ningún lado); $\delta(C) = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ (sólo los lados, en este orden: abajo, arriba, izquierda, derecha); $\delta_i C = \delta C \cap C = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ (lados de abajo y de la izquierda); $\delta_e C = \delta C \cap C^\complement = \{(x,1) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ (lados de arriba y de la derecha); $\mathrm{ext}(C) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathring{C} \cup \delta(C))$ (el plano $\mathbb{R}^2$ menos los puntos del cuadrado relleno y de todos sus lados) [por ser $\{\mathring{C}, \delta C, \mathrm{ext} C\}$ una partición de $\mathbb{R}^2$]. ■

Cubit 38.

En $(\mathbb{R}^2, d_2)$:
a. ¿existen conjuntos iguales a su frontera?;
b. y si existen, ¿puede ser alguno distinto de su adherencia?

Un esquema de resolución.—

a. Sí, ya hemos visto varios ejemplos (¡busquémoslos! [✍]); también a modo de ejemplos: $\{(x,y) : y = mx\}$, para todo $m \in \mathbb{R}$, y $\{(x,y) : x^2 + y^2 = r\}$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$;
b. no: al ser iguales a su frontera son cerrados (por serlo ésta) por lo que son iguales a su adherencia. ■

Cubit 39.

Siendo A un conjunto en $(\mathbb{R}, d_2)$, ¿$A'' = A'$?

Un esquema de resolución.— No tiene por qué: $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}' = \{0\}$ y $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}'' = \{0\}' = \emptyset$. ■

[20] Un conjunto es cerrado si, y sólo si, incluye a su frontera (una forma equivalente de decir que su frontera exterior es vacía).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cubit 40.

En $(\mathbb{R}, d_2)$, construyamos un conjunto con exactamente tres puntos de acumulación.

Un esquema de resolución.— Sea $\{1+1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{3+1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{7+1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$; sus tres puntos de acumulación son 1, 3 y 7. ■

Cubit 41.

a. En $(\mathbb{R}, d_2)$, la frontera de un conjunto, ¿es siempre un conjunto de puntos aislados?
b. ¿Y en $(\mathbb{R}^n, d_2)$?

Un esquema de resolución.—

a. No, a modo de ejemplos, éstos: I., $\delta(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, pues $\mathbb{R}^s = \emptyset$; II., $\delta(\mathbb{Q} \cap [10,12]) = [10,12]$, porque $[10,12]^s = \emptyset$; III., $\delta(\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}) = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}$, ya que $0 \notin \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}^s = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$.
b. No, por ejemplo: $\delta(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$, puesto que $\text{isla}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. ■

Cubit 42.

Hallemos la adherencia, el derivado y la isla de $[0,1/4)$ en $(\mathbb{R}, d_2)$.

[EFO 21.1.2025:I.0.B.f–h], [EFE 22.5.2025:I.0.B.f–h], [EFE 20.6.2025:I.0.B.f–h].

Un esquema de resolución.— Sea $A = [0,1/4)$, por Cubit 34 sabemos que $\mathring{A} = (0,1/4)$, $\delta A = \{0,1/4\}$ y $\text{ext}A = (-\infty,0) \cup (1/4,\infty)$; ahora:

Adherencia.— $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A$, por lo que $\overline{A} = (0,1/4) \cup \{0,1/4\} = [0,1/4]$ [por ser $\{\mathring{A}, \delta A\}$ una partición de $\overline{A}$] (o bien, alternativa pero equivalentemente, $\overline{A} = [0,1) \backslash \text{ext}A = [0,1) \backslash (1/4,1) = [0,1/4]$ [por ser $\{\text{ext}A, \overline{A}\}$ una partición de $(1/4,1)$]).

Isla.— Como $A^s \subseteq A$, nos preguntamos qué $x \in A$ están en A^s. Por definición de isla, $x \in A^s$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \cap A = \{x\})$. Veamos: si $x = 0$, todos los puntos de $(0, \text{mín}\{r, 1/4\})$ están en $B(x,r) \cap A$; si $x \in (0,1/4)$, todos los puntos de $(x, x + \text{mín}\{r, |x-1/4|\})$ están en $B(x,r) \cap A$. Luego, no existe ninguna bola de centro $x \in A$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$ y, por lo tanto, $A^s = \emptyset$.

Derivado.— Como $\{A', A^s\}$ es una partición de $\overline{A}$, entonces $A' = \overline{A} \setminus A^s = [0,1/4] \setminus \emptyset = [0,1/4]$; (alternativa y equivalentemente, $A' = [0,1/4]$ porque a todo punto de $[0,1/4]$ nos podemos aproximar por puntos de $[0,1/4)$).

Solución.— $\overline{A} = A' = [0,1/4]$ y $A^s = \emptyset$. ■

Cubit 43.

Hallemos la adherencia, el derivado y la isla de $[0,1/4)$ en $([0,1), d_2)$.

[EFO 9.1.2026:I.0.B.f–h].

Un esquema de resolución.— Sea $A = [0,1/4)$, por Cubit 35 sabemos que $\mathring{A} = [0,1/4)$, $\text{ext}A = (1/4,1)$, $\delta A = \{1/4\}$, $\delta_i A = \emptyset$, $\delta_e A = \{1/4\}$; ahora:

Adherencia.— $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A = [0,1/4) \cup \{1/4\} = [0,1/4]$ [por ser $\{\mathring{A}, \delta A\}$ una partición de $\overline{A}$] (o bien, alternativa pero equivalentemente, $\overline{A} = [0,1) \setminus \text{ext}A = [0,1) \setminus (1/4,1) = [0,1/4]$ [por ser $\{\text{ext}A, \overline{A}\}$ una partición de $(1/4,1)$]).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Isla.— Toda bola centrada en un punto de $[0,1/4)$ contiene infinitos puntos de $[0,1/4)$ por ser éste un intervalo de números reales en el espacio $([0,1),d_2)$, también de números reales: por ejemplo, si centramos la bola en $x \in [0,1/4)$, aunque r sea mucho más pequeño que mín$\{|0-x|,|x-1/4|\}$, el punto medio x_m entre x y $x+r$ también está en la bola $B(x,r)$, y el punto medio entre x y x_m también, y así sucesivamente; en otras palabras, $A^s=\emptyset$.

Derivado.— $A'=\overline{A}\setminus A^s=\overline{A}\setminus\emptyset=\overline{A}=[0,1/4]$ [por ser $\{A',A^s\}$ una partición de $\overline{A}$] (o alternativa pero equivalentemente, $A'=[0,1/4]$ porque a todo punto de $[0,1/4]$ nos podemos aproximar por puntos de $[0,1/4)$).

Solución.— $\overline{A}=A'=[0,1/4]$ y $A^s=\emptyset$. ■

Cubit 44.

En $(\mathbb{R}^2,d_2)$, hallemos la adherencia, el derivado y la isla de la parábola $y=x^2$.

Un esquema de resolución.— Sea la gráfica de la parábola $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=x^2\}$; por Cubit 36 sabemos que $\mathring{P}=\emptyset$, $\delta P=P$, $\mathrm{ext}P=\mathbb{R}^2\setminus P$; ahora: $\overline{P}=\mathring{P}\cup\delta P=\emptyset\cup P=P$ [por ser $\{\mathring{P},\delta P\}$ una partición de $\overline{P}$] (o bien, alternativa pero equivalentemente, $\overline{P}=\mathbb{R}^2\setminus\mathrm{ext}P=\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}^2\setminus P)=P$ [por ser $\{\mathrm{ext}P,\overline{P}\}$ una partición de $\mathbb{R}^2$]); $P'=P$ [porque a todo punto de P nos podemos aproximar por puntos de P]; $P^s=\overline{P}\setminus P'=P\setminus P=\emptyset$ [por ser $\{P',P^s\}$ una partición de $\overline{P}$]. ■

Cubit 45.

En $(\mathbb{R}^2,d_2)$, hallemos la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\{(x,y):0\le x<1,\,0\le y<1\}$.

Un esquema de resolución.— Sea $C=\{(x,y):0\le x<1,\,0\le y<1\}$; $C=\underline{[0,1)\times[0,1)}$; gráficamente, es el cuadrado relleno $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ sin incluir los lados $\overline{(1,0)(1,1)}$ ni $\overline{(0,1)(1,1)}$; por Cubit 37 sabemos que $\mathring{C}=\{(x,y):0<x<1,\,0<y<1\}=(0,1)\times(0,1)$ (dicho cuadrado sin incluir ningún lado), $\delta C=\{(x,0):0\le x\le 1\}\cup\{(x,1):0\le x\le 1\}\cup\{(0,y):0\le y\le 1\}\cup\{(1,y):0\le y\le 1\}$ (sólo los lados, en este orden: abajo, arriba, izquierda, derecha), $\mathrm{ext}C=\mathbb{R}^2\setminus(\mathring{C}\cup\delta(C))$ (el plano $\mathbb{R}^2$ menos los puntos del cuadrado relleno y de todos sus lados); ahora: $\overline{C}=\mathring{C}\cup\delta C=\{(x,y):0<x<1,\,0<y<1\}\cup\{(x,0):0\le x\le 1\}\cup\{(x,1):0\le x\le 1\}\cup\{(0,y):0\le y\le 1\}\cup\{(1,y):0\le y\le 1\}=\{(x,y):0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}=[0,1]\times[0,1]$ (el cuadrado relleno con todos sus lados)[21] [por ser $\{\mathring{C},\delta C\}$ una partición de $\overline{C}$]; $C^s=\emptyset$ [las bolas abiertas de $(\mathbb{R}^2,d_2)$ son círculos sin sus circunferencias; toda bola centrada en un punto del cuadrado relleno sin dos lados contiene infinitos puntos de dicho cuadrado (si el punto no es el centro del cuadrado, basta que pensemos en el segmento de la bola de extremo su centro y orientado hacia el centro del cuadrado; si el centro de la bola es el centro del cuadrado, la orientación hacia un vértice)]; $C'=\overline{C}\setminus C^s=\overline{C}\setminus\emptyset=\overline{C}=[0,1]\times[0,1]$ [por ser $\{C',C^s\}$ una partición de $\overline{C}$]. ■

[21] Gráficamente observamos lo que asegura el teorema que establece que la adherencia de un conjunto es el menor cerrado que contiene al conjunto; el cuadrado relleno con todos los lados es el cerrado más pequeño que incluye al cuadrado relleno sin dos lados; justamente añadir esos dos lados que le faltaban al cuadrado, ésta ha sido la operación «de menor entidad» para cerrarlo.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

0.6. Modelización con funciones

Cubit 46.

De un grifo cae una gota de agua cada segundo en un recipiente.
a. ¿Qué función representa el número de gotas que hay en el recipiente dependiendo del tiempo?
b. Dibujemos la gráfica de dicha función con Sage.

Un esquema de resolución.—

a. La función suelo: $\lfloor x \rfloor = n$ si, y sólo si, $n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n+1$.

b. `plot( floor(x), x, -5, 5 )` ■

Observación 19.— Es un dibujo burdo, en el que aparecen líneas verticales que obviamente no son parte de la función y en el que tampoco queda claro el valor de la función en los puntos de cambio de intervalo; queda pues pendiente que investiguemos cómo mejorar la representación en Sage [✍][22].

Cubit 47.

El precio por utilizar un artefacto hasta 20 minutos es de 17 euros, debiendo añadirse 5 euros por cada 10 minutos o fracción de 10 minutos de exceso.
a. ¿Qué función representa el coste de utilización de dicho artefacto hasta 50 minutos?
b. Dibujemos la gráfica de dicha función con Sage.

Un esquema de resolución.—

a. $C : [0,50] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$C(t) = \begin{cases} 17 & \text{si } t \in [0,20], \\ 22 & \text{si } t \in (20,30], \\ 27 & \text{si } t \in (30,40], \\ 32 & \text{si } t \in (40,50]. \end{cases}$$

b. dibujándola con razón de aspecto 1:1:

```
# definiendo C(t), el coste en función del tiempo
def C(t):
        if 0 <= t <= 20:
                return 17
        elif 20 < t <= 30:
                return 22
        elif 30 < t <= 40:
                return 27
        elif 40 < t <= 50:
                return 32
        else:
                return None  # nada
# representando C(t) en [0,50]
plot(C, 0, 50, color='brown', aspect_ratio=1, thickness=1,
   legend_label='C(t) = Coste de utilización durante t minutos',
   axes_labels=['t', 'C(t)'])
```
■

[22] Si pecamos de impaciencia: *vid.* cuestión 2.0 (práctica DOS) (pág. 185 de esta edición).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Observación 20.— Pudiésemos utilizar la instrucción piecewise para definir la función:

```
# definiendo C(t), el coste en función del tiempo
C = piecewise([
        ((0, 20), 17),
        ([20,20], 17),
        ((20, 30), 22),
        ([30,30], 22),
        ((30, 40), 27),
        ([40,40], 27),
        ((40, 50), 32),
        ([50,50], 32)
])
# representando C(t) en [0,50]
plot(C, 0, 50, color='brown', aspect_ratio=1, thickness=1, legend_label='
   C(t) = Coste de utilización durante t minutos', axes_labels=['t', 'C(t
   )'])
```

Observación 21.— Sucede lo mismo con el dibujo de la función que en Cubit 46.b; sigue quedando pendiente que investiguemos cómo mejorar la representación en Sage [✍].

Cubit 48.

De un pequeño estudio de mercado, una librería de segunda mano infiere que si fija para 60 de sus libros el precio en 2 euros por ejemplar, vendería los 60. Del mismo estudio también deduce que con un precio más elevado, algunos de esos libros quedarían sin vender, concretamente, estima que por cada incremento de 5 céntimos en el precio quedaría sin vender un libro.

a. ¿Qué función representa el ingreso por ventas de estos 60 libros dependiendo del número de ellos sin vender?
b. ¿Qué precio maximizaría el ingreso total?
c. ¿Cuál sería este ingreso máximo?

Un esquema de resolución.—

a. Si x es el número de libros sin vender, el número de libros vendidos es $60 - x$ y el precio es $2 + 0{,}05x$ euros; el ingreso por ventas es:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\text{ingreso por libro})\,(\text{número de libros vendidos}) \\ &= (2 + 0{,}05x)(60 - x) \\ &= -5x^2 + 100x + 12000. \end{aligned}$$

b. $f(x)$ es una función cuadrática, esto es, de la forma $ax^2 + bx + c$, en su caso, con $a = -5$, $b = 100$ y $c = 12000$; como $a < 0$, esta parábola es abierta hacia abajo por lo que es precisamente en su vértice donde se alcanza el máximo[23]; su vértice está en el punto $(x, f(x)) = (-b/2a, f(-b/2a)) = (10, 12500)$; así, si $x = 10$, esto es, si no se venden exactamente 10 libros, el ingreso por ventas es máximo; en este caso, el ingreso por libro es de $(2 + 0{,}05 \cdot 10) = 2{,}50$ euros; éste es justamente el precio que maximiza el ingreso total.

[23] Ya que hemos trabajado y trabajaremos con parábolas en varias ocasiones, igual no nos viniese mal refrescar nuestro conocimiento o incluso saber más; estas páginas web pudiesen sernos de ayuda: https://aga.frba.utn.edu.ar/parabola/ o https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/ecuacion-parabola/.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

c. El ingreso total máximo es de 12500 euros. ■

Cubit 49.

En un proyecto de construcción, el coste de instalar aislamiento térmico en las paredes depende del grado g de eficiencia del material (un material con g negativo podría generar el efecto contrario, calor en verano, frío en invierno; con $g = 0$, como si no se hubiese instalado nada; con g positivo, el efecto deseado, frío en verano, calor en invierno); suponemos: primero, que todo el material que se instala tiene el mismo grado de eficiencia; segundo, que el coste de instalación por metro cuadrado aumenta proporcionalmente al cuadrado de dicho grado de eficiencia, y tercero, que existe un coste fijo asociado a la instalación que no depende de tal grado;

a. modelicemos la función de coste total $C(g)$;
b. deseamos calcular, a partir de un coste total prescrito de C_0 euros, el grado de eficiencia g del material que generaría dicho coste; ¿notamos algún inconveniente matemático para este cálculo?, ¿qué podríamos hacer para salvar esta dificultad?

Observación 22.— Si nos resultase difícil incluso iniciar la resolución de este tipo de cuestiones (como la anterior y ésta), quizás fuese conveniente que repasásemos cuestiones/ejercicios/problemas de cursos anteriores sobre modelización con funciones. Este libro de precálculo pudiese sernos de ayuda: *Precálculo 2ed* (Jay Abramson y colaboradores)(OpenStax)[24]. En esta cuestión propuesta que nos ocupa se trata de una modelización cuadrática en la que y varía directamente con el cuadrado de x (que aquí nombraremos como g) (veamos en dicho libro, 3.9 «Resolver problemas de variación directa») (el coste fijo es el «valor inicial» —veamos en dicho libro, 2.3 «Construir modelos lineales»—). Tomémonos un tiempo, valdrá la pena [⌛⌛⌛].

Un esquema de resolución.— Como hemos dicho, en esta cuestión se trata de una modelización cuadrática en la que $C(g)$ varía directamente con el cuadrado de g, siendo el coste fijo, digamos c, el «valor inicial» de $C(g)$ —que tomamos en $g = 0$, esto es, para un grado de eficiencia cero, es decir, $C(0) = c$—.

a. La función de coste total es $C(g) = kg2 + c$, donde kg^2 recoge el hecho de que el coste de instalación por metro cuadrado aumente proporcionalmente al cuadrado del grado de eficiencia (segundo de los supuestos) y la constante c el hecho de que exista un coste fijo asociado a la instalación que no depende de tal grado (tercero de los supuestos), siendo así el coste total la suma de ambos costes;
b. ahora, C_0 es el valor de $C(g)$, esto es, $C(g) = C_0$; deseamos calcular g, esto es, dado el coste total prescrito, C_0, obtenemos el grado de eficiencia g del material que generaría dicho coste de la ecuación $C_0 = k \cdot g^2 + c$, despejando g, es decir, $g = \pm\sqrt{\dfrac{C_0 - c}{k}}$, dos posibles valores para el grado de eficiencia (salvo el caso —irreal— en el que el coste total fuese igual a c)[25]; un primer requisito matemático es que C_0 debe ser mayor o igual que c para que el argumento de la raíz sea no negativo; pudiésemos salvar esto exigiendo que el coste total prescrito C_0 sea mayor que el coste fijo c (mayor porque el caso $g = 0$ no tiene ningún interés); un segundo inconveniente podría ser el hecho de que el propio valor g de la raíz puede ser negativo, cero o positivo (si bien, $g = 0$ ya hemos dicho que carece de interés) (matemáticamente lo que sucede es que la función C no es inyectiva —grados de la misma magnitud pero signo contrario tienen la misma imagen: $C(-g) = C(g)$—, por lo que no

[24] Disponible en: https://openstax.org/details/books/precálculo-2ed.

[25] En realidad, lo que hemos hecho es buscar la función inversa de C (ya que entonces el valor de g es fácil de calcular, a saber, $g = C^{-1}(C_0)$): como $y = kg^2 + c$, entonces $y - c = kg^2$, por lo que $(y - c)/k = g^2$, de donde $g = \pm\sqrt{\dfrac{C_0 - c}{k}}$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

podríamos hablar de inversa; este es el inconveniente matemático que notamos: dado que C no es invertible, no podemos determinar unívocamente el grado de eficiencia a partir de un coste total prescrito —con esta función C podríamos determinar la magnitud del grado, $|g|$, pero no su signo—); pudiésemos salvar esta dificultad dejando claro que sólo nos interesa el caso $g > 0$, que es el que nos proporciona el efecto deseado (frío en verano, calor en invierno) (insistimos en la irrelevancia del caso $g = 0$) —matemáticamente, al despreciar el valor negativo de la raíz, existe la inversa de C, a saber, $C^{-1} : [C_0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, definida por $C^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x - c}{k}}$; así salvamos el problema. ■

0.7. Espacio topológico. Continuidad y límite puntual

0.7.0. Espacio topológico

Definición 0.39.— Sea X un conjunto y τ un conjunto de subconjuntos de X. (X, τ) es un *espacio topológico* precisamente si se satisface:

I. $\emptyset, X \in \tau$;
II. la unión cualquiera de elementos de τ es un elemento de τ;
III. la intersección finita de elementos de τ es un elemento de τ.

El conjunto τ se denomina la *topología* (del espacio topológico); los elementos de τ se conocen como los *abiertos* del espacio topológico.

Teorema 37.— Todo espacio métrico es topológico. Existen espacios topológicos que no son espacios métricos.

Definición 0.40.— Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $V \subseteq X$; decimos que V es un entorno de x precisamente si $(\exists \mathcal{O} \in \tau)(x \in \mathcal{O} \subseteq V)$.

0.7.1. Continuidad puntual de una función

Definición 0.41.— Sean (X, τ_0) e (Y, τ_1) dos espacios topológicos. Sea una función $f : X \longrightarrow Y$. Sea $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Entonces:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ es continua en } x_0 \text{ precisamente si}$$
$$(\forall V, \text{ entorno de } f(x_0))(\exists U, \text{ entorno de } x_0)(f(U) \subseteq V).$$

0.7.2. Límite puntual de una función

Definición 0.42.— Sean (X, τ_0) e (Y, τ_1) dos espacios topológicos. Sea una función $f : X \longrightarrow Y$. Sean $A \subseteq \operatorname{dom} f$, $x_0 \in A'$ y $l \in Y$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ precisamente si}$$
$$(\forall V, \text{ entorno de } l)(\exists U, \text{ entorno de } x_0)(x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A \to f(x) \in V).$$

0.8. Continuidad y límite puntual en espacios métricos

Definición 0.43.— Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $V \subseteq E$; decimos que V es un entorno de x precisamente si $(\exists \mathcal{O} \subseteq E, \mathcal{O}$ abierto en (E,d)$)(x \in \mathcal{O} \subseteq V)$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

0.8.0. Continuidad puntual de una función

Definición 0.44.— Sean (E_0, δ_0) y (E_1, δ_1) dos espacios métricos. Sea una función $f : E_0 \longrightarrow E_1$. Sea $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Entonces:

$$f : E_0 \longrightarrow E_1 \text{ es continua en } x_0 \text{ precisamente si}$$
$$(\forall V, \text{ entorno de } f(x_0))(\exists U, \text{ entorno de } x_0)(f(U) \subseteq V).$$

Particularizando en entornos que sean bolas abiertas centradas en los puntos de interés tenemos la siguiente definición de continuidad puntual de una función.

Definición 0.45.— Sean (E_0, δ_0) y (E_1, δ_1) dos espacios métricos. Sea una función $f : E_0 \longrightarrow E_1$. Sea $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Entonces:

$$f : E_0 \longrightarrow E_1 \text{ es continua en } x_0 \text{ precisamente si } (\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(f(B_{\delta_0}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\delta_1}(f(x_0), \epsilon)).$$

Ejemplo 33.

Sean $(E_0, \delta_0) = (E_1, \delta_1) = (\mathbb{R}, d_2)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Entonces:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua en } x_0 \text{ precisamente si}$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

0.8.1. Límite puntual de una función

Definición 0.46.— Sean (E_0, δ_0) y (E_1, δ_1) dos espacios métricos. Sea una función $f : E_0 \longrightarrow E_1$. Sean $A \subseteq \operatorname{dom} f$, $x_0 \in A'$ y $l \in E_1$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ precisamente si}$$
$$(\forall V, \text{ entorno de } l)(\exists U, \text{ entorno de } x_0)(x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A \rightarrow f(x) \in V).$$

Particularizando en entornos que sean bolas abiertas centradas en los puntos de interés tenemos la siguiente definición de límite puntual de una función.

Definición 0.47.— Sean (E_0, δ_0) y (E_1, δ_1) dos espacios métricos. Sea una función $f : E_0 \longrightarrow E_1$. Sean $A \subseteq \operatorname{dom} f$, $x_0 \in A'$ y $l \in E_1$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ precisamente si } (\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(f(B^*_{\delta_0}(x_0, \delta) \cap A) \subseteq B_{\delta_1}(l, \epsilon)).$$

Ejemplo 34.

Sean $(E_0, \delta_0) = (E_1, \delta_1) = (\mathbb{R}, d_2)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \operatorname{dom} f$, $x_0 \in A'$ y $l \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ precisamente si } (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Capítulo 1

Modelos en una variable: funciones $f : (\mathbb{R}, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_2)$

Como parte práctica de cada una de las secciones siguientes, debiésemos estudiar las correspondientes:

- cuestiones Cubit que se listan en ellas, sin olvidarnos de los ejemplos;
- cuestiones extra relacionadas localizadas en el cuaderno de bitácora[1];
- cuestiones, ejercicios y problemas de las obras recomendadas en dicho cuaderno de bitácora y en la bibliografía[2].

Como parte teórica, dichas obras son esenciales. Se recomienda encarecidamente su estudio.

1.0. Límites y continuidad

1.0.0. Límite puntual de una función

Definición 1.1 (Límite de una función en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio, $a \in A'$ y $l \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } \lim_{|x-a| \to 0} |f(x) - l| = 0,$$

esto es,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon).$$

Teorema 38 (*Unicidad del límite de una función en un punto*).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, A su dominio y $a \in A'$, entonces si f tiene límite en a, dicho límite es único.

[1] En la impartición en los años académicos 2024–2025, 2025–2026 y 2026–2027 de la asignatura Cálculo para la Edificación en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura (UEX), se ha llevado un cuaderno de bitácora en el aula virtual de la asignatura en el campus virtual de la UEX.

[2] *Vid. infra* pág. 227 de esta edición.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 39 (*Propiedades algebraicas de los límites*).— Siendo $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, A su dominio y $a \in A'$ y teniendo ambas, f y g, límite en a, entonces:

I. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;

II. $\lim_{x\to a}(\lambda f) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

III. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;

IV. si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Teorema 40 (*del emparedado/sandwich*).— Sean f, g y h tales que $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$ con $c \in (a, b)$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = l$.

Teorema 41 (*de la sustitución*).— Sean f y g dos funciones tales que en un entorno perforado de a toman los mismos valores, entonces si alguna de ellas tiene límite en a, lo tiene la otra y con el mismo valor límite.

1.0.1. Límites laterales

Definición 1.2 (Límite lateral izquierdo de una función en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio, $a \in A'$ y $l \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } \lim_{\substack{|x-a|\to 0 \\ x<a}} |f(x) - l| = 0,$$

esto es,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon).$$

También suele designarse por $f(a^-)$ o por $f(a - 0)$.

Definición 1.3 (Límite lateral derecho de una función en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio, $a \in A'$ y $l \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } \lim_{\substack{|x-a|\to 0 \\ a<x}} |f(x) - l| = 0,$$

esto es,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon).$$

También suele designarse por $f(a^+)$ o por $f(a + 0)$.

Teorema 42 (*de caracterización del límite puntual de una función*).— $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si, y sólo si, ambos límites laterales de f en a son l.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.0.2. Límites infinitos y en el infinito

Si en vez de en la recta real $\mathbb{R}$, trabajamos en la recta real ampliada, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, entonces debemos considerar dos posibilidades más: I. el valor l del límite es $-\infty$ o $+\infty$ (límites infinitos), y II., el punto a donde se alcanza el límite es $-\infty$ o $+\infty$ (límites en el infinito).

Límites infinitos

Definición 1.4 (Límites y límites laterales infinitos en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio y $a \in A'$, pudiese suceder que su límite en a fuese $-\infty$ o $+\infty$, dándose las siguientes posibilidades:

si el límite es $-\infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \to f(x) < r),$$

y sus correspondientes límites laterales:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \to f(x) < r),$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \to f(x) < r),$$

y si el límite es $+\infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \to r < f(x)),$$

y sus correspondientes límites laterales:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \to r < f(x)),$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \to r < f(x)).$$

Límites en el infinito

Definición 1.5 (Límites finitos e infinitos en el infinito).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y A su dominio, pudiese suceder que pudiésemos acercarnos a $-\infty$ o $+\infty$, dándose las siguientes posibilidades:

si el límite es $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } (\forall \epsilon > 0)(\exists s < 0)(\forall x \in A)(x < s \to |f(x) - l| < \epsilon),$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \text{ si, y sólo si, } (\forall \epsilon > 0)(\exists s > 0)(\forall x \in A)(s < x \to |f(x) - l| < \epsilon),$$

si el límite es $-\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r < 0)(\exists s < 0)(\forall x \in A)(x < s \to f(x) < r),$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r < 0)(\exists s > 0)(\forall x \in A)(s < x \to f(x) < r),$$

si el límite es $+\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r > 0)(\exists s < 0)(\forall x \in A)(x < s \to r < f(x)),$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ si, y sólo si, } (\forall r > 0)(\exists s > 0)(\forall x \in A)(s < x \to r < f(x)).$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

1.0.3. Indeterminaciones

Lo que sigue es cómo proceder (en algunos hay más de una posibilidad) para calcular el límite o demostrar que éste no existe en estos casos de indeterminación.

Indeterminación $\left[\frac{k \neq 0}{0}\right]$

- calcular los límites laterales.

Indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

- descomponer en factores los polinomios que figuran en el numerador y en el denominador;
- multiplicar y dividir por el conjugado.

Indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- dividir numerador y denominador por la mayor potencia.

Indeterminación $[\infty - \infty]$

- realizar operaciones y simplificar;
- multiplicar y dividir por el conjugado;
- transformar a $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$.

Indeterminación $[0 \cdot \infty]$

- transformar a $\left[\frac{0}{0}\right]$: $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$;
- transformar a $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$.

Indeterminación $\left[0^0\right]$

- transformar a $[0 \cdot \infty]$: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}$.

Indeterminación $\left[\infty^0\right]$

- transformar a $[0 \cdot \infty]$: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}$.

Indeterminación $[1^\infty]$

- transformar a $[0 \cdot \infty]$: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}$;
- transformar a $[0 \cdot \infty]$: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.0.4. Infinitésimos

Definición 1.6 (Infinitésimo en a).— Una función f es un infinitésimo en a si, y sólo si, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Teorema 43 (*Algunas propiedades algebraicas de los infinitésimos*).— Siendo α y β infinitésimos en a, entonces:

I. $\alpha + \beta$ es un infinitésimo en a;
II. $\forall k \in \mathbb{R}$, $k\alpha$ es un infinitésimo en a;
III. si γ es una función acotada en un entorno de a, entonces $\gamma \cdot \alpha$ es un infinitésimo en a.

Definición 1.7 (Infinitésimos equivalentes en a).— Dos infinitésimos en a, α y β, son equivalentes en a, si, y sólo si, $\lim_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Este hecho se designa por $\alpha \sim_a \beta$.

Teorema 44.— Un polinomio sin término independiente es un infinitésimo en cero equivalente en cero a su término de menor grado, esto es, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + + a_{m+1}x^{m+1} + + a_m x^m \sim_0 a_m x^m$.

Teorema 45 (*Algunos infinitésimos equivalentes*).— Si α es un infinitésimo en 0, entonces, son infinitésimos equivalentes en 0 los siguientes:

I. $\operatorname{sen}\alpha(x) \sim_0 \alpha(x)$;
II. $1 - \cos\alpha(x) \sim_0 \alpha(x)^2/2$;
III. $\tan\alpha(x) \sim_0 \alpha(x)$;
IV. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim_0 \alpha(x)$;
V. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim_0 \alpha(x)\ln a$ (con $a > 0$);
VI. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim_0 \alpha(x)$;
VII. $(1 + \alpha(x))^r - 1 \sim_0 r\alpha(x)$ (con $r \in \mathbb{R}$);
VIII. $\operatorname{arc\,sen}\alpha(x) \sim_0 \alpha(x)$;
IX. $\arctan\alpha(x) \sim_0 \alpha(x)$;
X. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x)\right) \sim_0 \alpha(x)$;
XI. $1/\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x)\right) \sim_0 \alpha(x)$;
XII. $(r + \alpha(x))^{\alpha(x)} - r^{\alpha(x)} \sim_0 \alpha(x)^2/r$ (con $r \in \mathbb{R}^+$).

Teorema 46 (*de sustitución de infinitésimos equivalentes*).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio y $a \in A'$, y siendo α y β dos infinitésismos equivalentes en a, entonces:

I. $\lim_{x\to a} f(x)\alpha(x) = \lim_{x\to a} f(x)\beta(x)$;
II. $\lim_{x\to a} f(x)/\alpha(x) = \lim_{x\to a} f(x)/\beta(x)$.

1.0.5. Continuidad

Definición 1.8 (Función continua en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio y $a \in A \cap A'$, decimos que f es continua en a si, y sólo si,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 47 (*Propiedades algebraicas de las funciones continuas*).— Siendo $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en a, entonces:

I. $f + g$ es continua en a;
II. λf es continua en a $(\lambda \in \mathbb{R})$;
III. $f \cdot g$ es continua en a;
IV. si $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Teorema 48 (*de continuidad de la composición de funciones continuas*).— Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g(f)$ es continua en a.

1.0.6. Discontinuidad

Definición 1.9 (Función discontinua en a).— La función f presenta en a:

- una *discontinuidad evitable* si, y sólo si, $\lim_{x \to a} f(x) = l$, pero o bien $f(a) \neq l$ o bien $\nexists f(a)$;
- una *discontinuidad de salto* si, y sólo si, existen sus límites laterales en a pero son distintos (si alguno de sus límites laterales es infinito, decimos que la discontinuidad es de salto infinito);
- una *discontinuidad esencial* si, y sólo si, alguno de sus límites laterales no existe.

1.0.7. Continuidad lateral

Definición 1.10 (Función continua por la izquierda en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio y $a \in A \cap A'$, decimos que f es continua por la izquierda en a si, y sólo si,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

esto es, si, y sólo si,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Definición 1.11 (Función continua por la derecha en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, A su dominio y $a \in A \cap A'$, decimos que f es continua por la derecha en a si, y sólo si,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

esto es, si, y sólo si,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Teorema 49 (*de caracterización de la continuidad puntual de una función*).— La función f es continua en a si, y sólo si, f es continua por la izquierda y por la derecha en a.

Definición 1.12 (Función continua en un intervalo cerrado).— Decimos que f es continua en $[a, b]$ si, y sólo si, f es continua en (a, b), f es continua por la derecha en a y f es continua por la izquierda en b.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.0.8. Ejercicios resueltos

Cubit 50.

Utilicemos la definición de límite de una función en un punto para demostrar que:
a. $\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$;
b. $\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$;
c. $\lim_{x\to 2}x^2=4$.

Un esquema de resolución.— *Vid.* ejemplos 6, 7 y 8, pp. 53-54 de *Cálculo, Tomo I*, 10.ª ed., de Ron Larson y Bruce H. Edwards. ■

Cubit 51.

Utilicemos la definición de límite de una función en un punto para demostrar que:
a. $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$;
b. $\lim_{x\to 3}(4x-1)=11$;
c. $\lim_{x\to 1}(x^2+2x)=3$.

Un esquema de resolución.— *Vid.* ejemplos 1.4, 1.5 y 1.6, pp. 9-10 de *Cálculo diferencial e integral con aplicaciones* de Elsie Hernández Saborio (Instituto Tecnológico de Costa Rica)[3]. ■

Cubit 52.

En $(\mathbb{R},d_2)$ demostremos que $f(x)=x^2$ es continua en $x=1$.

Un esquema de resolución.— Como el dominio de x^2 es $\mathbb{R}$, por definición de límite: $\lim_{x\to 1}x^2=1$ si, y sólo si, $(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})(|x-1|<\delta\to|x^2-1|<\epsilon)$; en definitiva, para demostrar que dicho límite es 1, dado $\epsilon>0$, debemos encontrar un $\delta>0$, tal que si $|x-1|<\delta$, entonces $|x^2-1|<\epsilon$. Veamos:

$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=|x+1|\cdot|x-1|\leq(|x-1|+2)\cdot|x-1|$ (1); si $|x-1|<\delta$, entonces $|x^2-1|<(\delta+2)\delta$ (2); de (1) y (2) se sigue $|x^2-1|<\delta^2+2\delta$, por lo que para que $|x^2-1|<\epsilon$, basta que suceda que $\delta^2+2\delta=\epsilon$, esto es, que $\delta=\sqrt{1+\epsilon}-1$.

Por ejemplo, para un valor dado de $\epsilon=10^{-2}$, bastará que tomemos $\delta=\sqrt{1+10^{-2}}-1\approx 0,0049875$ para que se satisfaga que si $|x-1|<\delta$, entonces $|x^2-1|<\epsilon$. ■

Cubit 53.

Hagamos lo siguiente:
a. estudiemos $\lim_{x\to 0}f(x)$, con $f(x)=\{x^2 \text{ si } x<0, x+1 \text{ si } 0\leq x\}$;
b. representemos dicha función en Wolfram|Alpha[4](*sugerencia:* utilicemos la instrucción `piecewise`[5]).

[3] *Vid.* https://archive.org/details/2009CalculoDiferencialEIntegralConAplicaciones.
[4] *Vid.* https://www.wolframalpha.com/.
[5] *Vid. v. gr.* https://reference.wolfram.com/language/ref/Piecewise.html (si bien existen más variantes de uso de esta orden que las recogidas en esta página web).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.—

a. Como la definición de f es distinta a la izquierda y a la derecha de 0, estudiamos los límites laterales: por una parte, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$; por otra, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = \lim_{x\to 0^+} x + \lim_{x\to 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$; como los límites son distintos, no existe el límite en cero de f.

b. Por ejemplo, en el intervalo $[-3, 3]$, bien así:

```
Plot[Piecewise[{{x^2, x < 0}, {x+1, x >= 0}}], {x, -3, 3}]
```

o así:

```
representa piecewise[{{x^2,x<0},{x+1,x>=0}}] de x=-3 a 3
```

■

Cubit 54.

Demostremos que no existe el $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (*sugerencia:* razonemos por límites laterales).

Un esquema de resolución.— En efecto, no existe ya que, por un lado, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x$, que no existe y, por otro, $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{sen} x$, que tampoco existe. ■

Cubit 55.

Demostremos que no existe el $\lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{3 + e^x}$ (*sugerencia:* razonemos por reducción al absurdo; poniendo $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en función del $\lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{3 + e^x}$, seremos capaces de deducir que existe el $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; pero esto contradice Cubit 54).

Un esquema de resolución.— Por reducción al absurdo: supongamos que existe y que es L; entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(3 + e^x)(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2)}{3 + e^x} \\
&= \lim_{x\to 0} (3 + e^x) \left(\lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{3 + e^x} - \lim_{x\to 0} \frac{2}{3 + e^x} \right) \\
&= 4(L - 2/4) \\
&= 4L - 2.
\end{aligned}$$

He aquí el absurdo: no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (por Cubit 54) y sí existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (por lo anterior, sería $4L - 2$). ■

Cubit 56.

(Búsqueda bibliográfica). Busquemos y estudiemos la demostración de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, la que se basa en semejanza de triángulos y el teorema del emparedado.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— Es vuestro, disfrutad con la búsqueda [✍]. ■

Cubit 57.

Demos ejemplos de:
a. una función que no tenga límite en ningún punto;
b. una función que no tenga límite en un único punto (en los demás, sí);
c. una función que no tenga límite en sólo dos puntos (en los demás, sí);
d. una función que no tenga límite en sólo un número finito de puntos (en los demás, sí);
e. una función que no tenga límite en un número infinito de puntos y que tenga límite también en un número infinito de puntos.

Un esquema de resolución.—

a. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{0 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\,,\,1 \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$;
b. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{0 \text{ si } x<c\,,\,1 \text{ si } c<x\}$;
c. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{0 \text{ si } x<-c\,,\,1 \text{ si } -c<x<c\,,\,2 \text{ si } c<x\}$;
d. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{0 \text{ si } x<0\,,\,1 \text{ si } 0<x<1\,,\,2 \text{ si } 1<x<2\,,\,\ldots\,,\,n \text{ si } n-1<x<n\,,\,n+1 \text{ si } n<x\}$;
e. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (suelo de x). ■

Cubit 58.

Demos ejemplos de:
a. una función que tenga límite en un único punto (en los demás, no);
b. una función que tenga límite en sólo dos puntos (en los demás, no);
c. una función que tenga límite en sólo un número finito de puntos (en los demás, no);
d. una función que tenga límite en un número infinito de puntos y que no tenga límite también en un número infinito de puntos.

Un esquema de resolución.—

a. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{x \text{ si } x\in\mathbb{Q}\,,\,1-x \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$;
b. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{x^2 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\,,\,1 \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$;
c. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{x^3-3x \text{ si } x\in\mathbb{Q}\,,\,1 \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$;
d. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\{x \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,,\,0 \text{ si } x\in(-1/2,1/2)\cap\mathbb{Q}\,,\,1 \text{ si } x\in(1/2,3/2)\cap\mathbb{Q}\,,\,2 \text{ si } x\in(3/2,5/2)\cap\mathbb{Q}\,,\,\ldots\,,\,n \text{ si } x\in(n-1/2,n+1/2)\cap\mathbb{Q}\,,\,\ldots\}$. ■

Cubit 59.

¿Existe $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen} x$?

Un esquema de resolución.— No, ya que existen al menos dos caminos infinitos hacia $+\infty$ con límites distintos, a saber:

- el camino $\{\pi,2\pi,3\pi,\ldots\}$ hacia $+\infty$: como $\forall n\in\mathbb{N}$, $\operatorname{sen}(n\pi)=\operatorname{sen}\pi=0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} sen(n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, y
- el camino $\{\pi/2+2\pi,\pi/2+4\pi,\pi/2+6\pi,\ldots\}$ hacia $+\infty$: como $\forall n\in\mathbb{N}$, $\operatorname{sen}(\pi/2+2n\pi)=\operatorname{sen}(\pi/2)=1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/2+2n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$. ■

Observación 23.— Que exista el límite de una función f en a y sea L, equivale a que f tiene por límite L para todos los «caminos infinitos» hacia a (el hecho de ser a punto de acumulación del dominio de f permite estas aproximaciones por caminos), por ejemplo:

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

- como $\lim_{x\to\infty} x = +\infty$, entonces, en particular, $\lim_{n\to\infty} (2n+1) = +\infty$ (el camino $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ hacia $+\infty$) y $\lim_{n\to\infty} (33n^2 + 23n + 1) = +\infty$ (el camino $\{-1, 55, 177, 365, \ldots\}$ hacia $+\infty$), y
- como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$, entonces, en particular, $\lim_{n\to 0} \operatorname{sen}(1/2n) = 0$ (el camino $\{1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots\}$ hacia 0) y $\lim_{n\to 0} \operatorname{sen}(1/n^3) = 0$ (el camino $\{1, 1/8, 1/27, 1/64, \ldots\}$ hacia 0).

Es una equivalencia, así que si encontramos caminos infinitos hacia a distintos para los que f tiene límites distintos, no existe el límite de f en a.

Cubit 60.

¿Para qué números reales r es continua en $\mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{r}}{|x^2 - r|}$?

Un esquema de resolución.— Por una parte,

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{r}}{|x^2-r|} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x+\sqrt{r}}{r-x^2} & \text{si } x^2 - r < 0 \\ \dfrac{x+\sqrt{r}}{x^2-r} & \text{si } 0 \leq x^2 - r \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{x-\sqrt{r}} & \text{si } x < \sqrt{r} \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{r}} & \text{si } \sqrt{r} \leq x \end{array} \right.$$

donde, como vemos, ambas son funciones racionales y, por lo tanto, podemos asegurar que f es continua en $\mathbb{R}$ salvo en las raíces de $x - \sqrt{r}$, cuya única raíz es $x = \sqrt{r}$, por lo que resta que analicemos la continuidad en este punto; por otra, que $\sqrt{r} \in \mathbb{R}$ impone que $r \geq 0$, así:

- si $r = 0$, $\lim_{x\to\sqrt{r}} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x^2|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$, que no existe, por lo que f no es continua en $x = \sqrt{r}$ si $r = 0$;
- si $r > 0$, $\lim_{x\to\sqrt{r}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{r}^-} \dfrac{-1}{x-\sqrt{r}} = -\infty$, mientras que $\lim_{x\to\sqrt{r}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{r}^+} \dfrac{1}{x-\sqrt{r}} = \infty$, por lo que no existe el límite de f en $\sqrt{r}$ y, por lo tanto, f no es continua en $x = \sqrt{r}$ si $r > 0$.

Solución.— No existe ningún $r \in \mathbb{R}$ para el que la función f sea continua en $\mathbb{R}$ (ya que en ningún caso lo es en $x = \sqrt{r}$). ■

Cubit 61.

Estudiemos la continuidad de $f(x) = \max\{x, x^2\}$ en $\mathbb{R}$.

Un esquema de resolución.— Podemos apreciar que la función

$$f(x) = \max\{x, x^2\} = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{array} \right.$$

es continua lateralmente en ambos lados de 0 y 1 por ser polinómica; resta estudiar la continuidad en dichos puntos:

- en 0:
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$,
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$,
  - $f(0) = 0$,

  por lo que f es continua en $x = 0$;
- en 1:
  - $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$,

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$,
- $f(1) = 1$,

por lo que f es continua en $x = 1$.

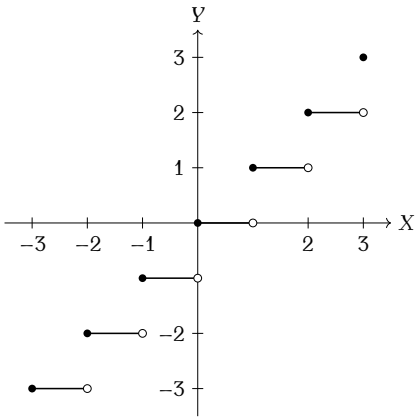
Solución.— La función $f(x) = \max\{x, x^2\}$ es continua en $\mathbb{R}$. ■

Cubit 62.

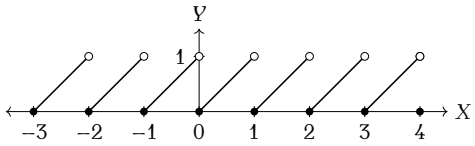
Estudiemos la continuidad de $f(x) = x - \lfloor x\rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x\rfloor$ es la función suelo[6]).

[EPP 11.11.2024:1.ª.1.A], [EFO 21.1.2025:I.1.A], [EFE 22.5.2025:I.1.A], [EFE 20.6.2025:I.1.A].

Un esquema de resolución.— Dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor$ es el mayor número entero menor o igual que x, esto es, $\lfloor x\rfloor = n$ siendo $n \le x < n+1$; su representación en $[-3,3]$ es:



La función que nos interesa es $x - \lfloor x\rfloor$, que atendiendo a la definición anterior es $x - \lfloor x\rfloor = x - n$ con $n \le x < n+1$, esto es, si $x \in [n, n+1)$; su representación en $[-3,4]$ es:



Como el polinomio $x - n$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, lo es en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, en particular en todos los intervalos abiertos $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por esto, la función $x - \lfloor x\rfloor$ sólo es discontinua en los números enteros, presentando en cada uno de ellos una discontinuidad de salto de magnitud 1, siendo en cada uno de ellos continua por la derecha —pues $\lim_{x\to n^+} (x - \lfloor x\rfloor) = \lim_{\substack{x\to n\\ n\le x}} (x - \lfloor x\rfloor) = \lim_{\substack{x\to n\\ n\le x}} (x - n) = n - n = 0$, igual a $f(n) = n - \lfloor n\rfloor = 0$— y discontinua por la izquierda —ya que $\lim_{x\to n^-} (x - \lfloor x\rfloor) = \lim_{\substack{x\to n\\ x\le n}} (x - \lfloor x\rfloor) = \lim_{\substack{x\to n\\ x\le n}} (x - (n-1)) = n - (n-1) = 1$, que no es igual a $f(n)$—. ■

1.0.9. Apéndice

Como complemento al estudio de la sección 1.0, pudiésemos estudiar también el cálculo del siguiente límite, comenzando, bien así:

$$\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/\cos^2 x} \ [\text{es } 1^\infty] = e^{\lim_{x\to\pi/2} (1/\cos^2 x)(\operatorname{sen} x - 1)} \ [\text{es } \infty\cdot 0]$$

[6] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_de_parte_entera.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$= \mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\cos^2(\pi/2-t))(\operatorname{sen}(\pi/2-t)-1)} \text{ [haciendo } t = \pi/2 - x\text{]}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)(\cos t-1)} \text{ [pues } \operatorname{sen}(\pi/2 - t) = \cos t;\ \cos^2(\pi/2 - t) = \operatorname{sen}^2 t\text{],}$$

bien así:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{1/\cos^2 x} \text{ [es } 1^\infty\text{]} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\pi/2}(1/\cos^2 x)\ln(\operatorname{sen} x)} \text{ [es } \infty\cdot 0\text{]}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)\ln(\cos t)} \text{ [haciendo } t = \pi/2 - x\text{]}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)\ln((\cos t-1)+1)} \text{ [sumando y restando 1]}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)(\cos t-1)} \text{ [pues } \ln(1 + (\cos t - 1)) \sim_0 \cos t - 1\text{];}$$

en cualquier caso, el cálculo sigue así:

$$\mathrm{e}^{\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)(\cos t-1)} = \mathrm{e}^{-\lim_{t\to 0}(1/\operatorname{sen}^2 t)(1-\cos t)}$$
$$= \mathrm{e}^{-\lim_{t\to 0}(t^2/2)/t^2} \text{ [porque } 1 - \cos t \sim_0 t^2/2 \text{ y } \operatorname{sen}^2 t \sim_0 t^2\text{]}$$
$$= \mathrm{e}^{-1/2}.$$

1.1. Teoremas de valores intermedios de continuidad

Teorema 50 (*de acotación de Weierstrass*).— Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$.

Teorema 51 (*del máximo y el mínimo de Weierstrass*).— Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$, esto es, existen $m_0, m_1 \in [a, b]$ tales que $(\forall x \in [a, b])(f(m_0) \leq f(x) \leq f(m_1))$.

Teorema 52 (*del valor intermedio generalizado / propiedad de Darboux generalizada*).— Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ tales que, bien $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$, bien $g(a) < f(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Teorema 53 (*del valor intermedio / propiedad de Darboux*).— (Caso particular de la propiedad de Darboux generalizada para $g(x) = k$). Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces $\forall k \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teorema 54 (*del valor medio de Bolzano*).— (Caso particular de la propiedad de Darboux para $k = 0$). Si f es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.1.0. Ejercicios resueltos

Cubit 63.

¿Para qué números reales r la ecuación $x^3 - 3x + r = 0$ tiene alguna solución en $[-1,1]$?

[EPP 10.11.2025:I.1.A].

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = x^3 - 3x + r$; encontremos un intervalo cerrado para poder aplicar el teorema de Bolzano a f; observamos que $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + r = 2 + r$ y que $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + r = -2 + r$; para poder aplicar el teorema de Bolzano debe suceder: por un lado, que $f(-1)\cdot f(1) < 0$, esto es, que $(2+r)(-2+r) < 0$, es decir, que $r^2 - 4 < 0$, o sea, que $r^2 < 4$, en definitiva, que $-2 < r < 2$; por otro, con respecto a la continuidad de f, x^3, $-3x$ y r son funciones continuas en $\mathbb{R}$ [por ser polinómicas], por lo que podemos asegurar la continuidad de f en $\mathbb{R}$ por ser continua la suma de continuas; por ser f continua en $\mathbb{R}$ y ser $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$, f es continua en $[-1,1]$; por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$; en otras palabras, existe al menos un $c \in (-1,1)$ solución de la ecuación propuesta; todo ello, no lo olvidemos, para $r \in (-2,2)$. ■

Cubit 64.

La función definida por $f(x) = \{-1 \text{ si } x = 0\,,\, x \text{ si } 0 < x < 1\}$ es continua en $(0,1)$ y $f(0)f(1) < 0$, pero $\nexists x \in (0,1)$ tal que $f(x) = 0$, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?

[EFO 21.1.2025:I.1.B].

Un esquema de resolución.— El teorema de Bolzano afirma que si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y se satisface que $f(a)\cdot f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. Si bien la función dada satisface que $f(0)f(1) < 0$, no así que sea f continua en $[0,1]$. En efecto, f no es continua en $[0,1]$ por no ser continua por la derecha en 0. Esto último es así pues $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \neq -1 = f(0)$.

Solución.— No existe contradicción alguna, lo que sucede es que el teorema de Bolzano no puede aplicarse a f en $[0,1]$, ya que f no satisface en $[0,1]$ las hipótesis de dicho teorema. ■

Observación 24.— «Un teorema es para siempre» (Eduardo Sáenz de Cabezón)[7].

Cubit 65.

Sea $f(x)$ continua en $(0,1)$ tal que $0 < f(x) < 1$ para todo $x \in (0,1)$, ¿contradice esto el teorema de Weierstrass?

Un esquema de resolución.— El teorema de Weierstrass afirma que si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces es acotada en $[a,b]$ y f alcanza en $[a,b]$ sus valores mínimo y máximo. Sobre la continuidad de f, del enunciado sólo sabemos que f es continua en el abierto $(0,1)$, desconociendo qué sucede en los extremos; por lo tanto, al no poder asegurar la continuidad de f en el cerrado $[0,1]$, no podemos aplicar el teorema de Weierstrass.

Solución.— No existe contradicción alguna, lo que sucede es que el teorema de Weierstrass no puede aplicarse a f en $[0,1]$ y que no se tiene la seguridad de que se satisfagan las hipótesis de dicho teorema. ■

[7] *Vid.* https://www.youtube.com/watch?v= gHJNMiSFuAM.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 35.

Vertemos café caliente en una taza fría. Sean $f(t)$ y $z(t)$ las funciones de temperatura del café y de la taza, respectivamente, ambas continuas respecto del tiempo (t). Si inicialmente $f(0) > z(0)$ (café caliente en taza fría) y en un determinado momento m, $f(m) < z(m)$ (la taza absorbió calor del café y adquirió mayor temperatura que éste), demostremos que existe un instante $t \in (0, m)$ en el que la temperatura del café y la temperatura de la taza fue la misma.

[EFO 9.11.2026:I.1.A], [EFE 17.6.2026:I.1.A][8].

Un esquema de resolución.— Consideremos la función diferencia

$$\begin{aligned} f - z : [0, m] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (f - z)(t) \end{aligned}$$

Tenemos:

I. esta función es continua en $[0, m]$ por ser diferencia de continuas;
II. además,

$$\begin{aligned} f(0) > z(0) &\to (f - z)(0) = f(0) - z(0) > 0, \\ f(m) < z(m) &\to (f - z)(m) = f(m) - z(m) < 0. \end{aligned}$$

El teorema de Bolzano para funciones reales de variable real afirma que si una función h es continua en un cerrado $[a, b]$ y satisface que $h(a) \cdot h(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

Como $f - z$ satisface las hipótesis de este teorema en $[0, m]$ (las anteriores I y II), entonces, de él concluimos que existe $t \in (0, m)$ tal que $(f - z)(t) = 0$, esto es, tal que $f(t) = z(t)$, en palabras: existe un instante t entre el inicio y el momento m para el que la temperatura del café es la misma que la temperatura de la taza. ■

Observación 25.— [Otra vía]

Dadas las funciones f y z, ambas continuas en $[0, m]$, se satisfacen $z(0) < f(0)$ y $f(m) < z(m)$; por lo tanto, por la propiedad de Darboux generalizada, existe $t \in (0, m)$ tal que $f(t) = z(t)$, en palabras, un instante t entre 0 y m en el que la temperatura del café y de la taza son la misma.

Cubit 66.

Demostremos que si un día, un camión viaja de Cáceres a Badajoz, saliendo a las 7 : 00, regresando al día siguiente, de Badajoz a Cáceres, saliendo también a las 7 : 00, yendo ambos viajes por el mismo camino, entonces existe un punto de dicho camino en el que el camión ha estado a la misma hora (instante de tiempo) en ambos viajes.

[EPP 11.11.2024:1.ª.1.B].

[8] Sean $b(t)$ y $a(t)$ las funciones de temperatura de una barra de metal recién salida de la fragua y del agua en la que se introducirá para enfriarla, ambas continuas respecto del tiempo (t). Si inicialmente $b(0) > a(0)$ (barra caliente y agua fría) y en un determinado momento m, $b(m) < a(m)$ (el agua absorbió calor de la barra y adquirió más temperatura que ésta), demostremos que existe un instante $t \in (0, m)$ en el que la temperatura de la barra y la temperatura del agua fue la misma.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— En el primer viaje, el camión está en Cáceres (CC) a las 7 y en Badajoz (BA) después de las 7; en el segundo, está en BA a las 7 y en CC después de las 7. Sean las funciones reales de variable real —la variable puede considerarse real pues el camino puede estar representado por cualquier intervalo cerrado real (por ejemplo, tomando $[0,1]$, CC estaría representado por 0, BA por 1 y cualquier punto del camino entre CC y BA por un punto intermedio entre 0 y 1); [CC,BA] designa este hecho—:

$$\begin{aligned} t_1 :[\mathrm{CC,BA}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto t_1(s) \leftrightharpoons \text{instante de tiempo en el que está en } s \text{ en el primer viaje} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 :[\mathrm{CC,BA}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto t_2(s) \leftrightharpoons \text{instante de tiempo en el que está en } s \text{ en el segundo viaje} \end{aligned}$$

ambas continuas en [CC,BA].

Consideremos la función diferencia

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 :[\mathrm{CC,BA}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto (t_1 - t_2)(s) \end{aligned}$$

Tenemos:

I. Esta función es continua en [CC,BA] por ser diferencia de continuas.

II. Además,

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2)(\mathrm{CC}) &= t_1(\mathrm{CC}) - t_2(\mathrm{CC}) = 7 - (> 7) < 0, \\ (t_1 - t_2)(\mathrm{BA}) &= t_1(\mathrm{BA}) - t_2(\mathrm{BA}) = (> 7) - 7 > 0. \end{aligned}$$

El teorema de Bolzano para funciones reales de variable real afirma que si una función f es continua en un cerrado $[a,b]$ y satisface que $f(a)\cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Como $t_1 - t_2$ satisface las hipótesis de este teorema en [CC,BA] (las anteriores I y II), entonces, de él concluimos que existe $c \in$(CC,BA) tal que $(t_1 - t_2)(c) = 0$, esto es, tal que $t_1(c) = t_2(c)$, en palabras: existe un punto c del camino [CC,BA] para el que el instante de tiempo en el que el camión está en él en el primer viaje es el mismo que el instante de tiempo en el que está en él en el segundo viaje. ■

Cubit 67.

Resolvamos Cubit 66 utilizando la propiedad de Darboux generalizada.

[EPP 10.11.2025:I.1.B].

Un esquema de resolución.— Dadas, en Cubit 66, las funciones t_1 y t_2, ambas continuas en $[\mathrm{CC},\mathrm{BA}]$, se satisfacen $t_1(\mathrm{CC}) < t_2(\mathrm{CC})$ y $t_2(\mathrm{BA}) < t_1(\mathrm{BA})$; por lo tanto, por la propiedad de Darboux generalizada, existe $c \in (\mathrm{CC},\mathrm{BA})$ tal que $t_1(c) = t_2(c)$, en palabras, un punto c del camino en el que el camión ha estado a la misma hora en ambos viajes. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cubit 68.

Demostremos que la ecuación $2^x = \dfrac{1}{x}$ tiene al menos una solución real.

Un esquema de resolución.— Sea la función $f(x) = 2^x - \dfrac{1}{x}$; encontremos un intervalo cerrado para poder aplicar el teorema de Bolzano a f; observamos que $f(1/2) = \sqrt{2} - \dfrac{1}{1/2} = \sqrt{2} - 2 < 0$ y que $f(1) = 2 - \dfrac{1}{1} = 2 - 1 = 1 > 0$; con respecto a la continuidad de f, 2^x es continua en $\mathbb{R}$ y $\dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por lo que podemos asegurar la continuidad de f en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser continua la suma de continuas; por ser f continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y ser $[1/2, 1] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f es continua en $[1/2, 1]$; por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (1/2, 1)$ tal que $f(c) = 0$; en otras palabras, existe al menos un $c \in (1/2, 1)$ solución de la ecuación propuesta. ■

Cubit 69.

Demostremos que la ecuación $\cos x + 2^x = 3$ tiene al menos una solución real en $[1, 2]$.

[EFE 22.5.2025:I.1.B][9], [EFE 20.6.2025:I.1.B][9], [EFE 17.6.2026:I.1.B].

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = \cos x + 2^x - 3$; observamos que $f(1) = \cos 1 + 2^1 - 3 = \cos 1 - 1 < 0$ y que $f(2) = \cos 2 + 2^2 - 3 = \cos 2 + 1 > 0$; con respecto a la continuidad de f, 2^x, $\cos x$ y -3 son continuas en $\mathbb{R}$ y siendo continua la suma de continuas, f lo es en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo cerrado de interés, $[1, 2]$; por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$; en otras palabras, existe al menos un $c \in (1, 2)$ solución de la ecuación propuesta. ■

Observación 26.— [Otra vía]

Pudiésemos haber utilizado la propiedad de Darboux: sea $f(x) = \cos x + 2^x$; observamos que $f(1) = \cos 1 + 2^1 = \cos 1 + 2 < 3$ y que $f(2) = \cos 2 + 2^2 = \cos 2 + 4 > 3$; con respecto a la continuidad de f, $\cos x$ y 2^x son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que podemos asegurar la continuidad de f en $\mathbb{R}$ por ser continua la suma de continuas; por lo tanto, por la propiedad de Darboux, existe al menos un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 3$; en otras palabras, existe al menos un $c \in (1, 2)$ solución de la ecuación propuesta.

Cubit 70.

Demostremos que la $f(x) = x^4 - 4x$ toma el valor 1 al menos una vez en el intervalo $[1, 2]$.

[EFO 9.1.2026:I.1.B].

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = x^4 - 4x$; observamos que $f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 1$ y que $f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 = 16 - 8 = 8 > 1$; con respecto a la continuidad de f, x^4 y $4x$ son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que podemos asegurar la continuidad de f en $\mathbb{R}$ por ser continua la suma de continuas; por lo tanto, por la propiedad de Darboux, existe al menos un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 1$. ■

Observación 27.— [Otra vía]

[9] Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en $[-1, 0]$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Pudiésemos haber utilizado el teorema de Bolzano: sea $g(x) = x^4 - 4x - 1$; observamos que $g(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 - 1 = 1 - 4 - 1 = -4 < 0$ y que $g(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 1 = 16 - 8 - 1 = 7 > 0$; con respecto a la continuidad de g, x^4, $4x$ y -1 son continuas en $\mathbb{R}$ y siendo continua la suma de continuas, f lo es en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo cerrado de interés, $[1,2]$; por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (1,2)$ tal que $g(c) = 0$; en otras palabras, existe al menos un $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 1$.

1.2. Derivabilidad

1.2.0. Derivada puntual de una función

Definición 1.13 (Derivada de una función en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con A abierto, $a \in A$, es el siguiente límite siempre que éste exista y sea un número real:

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

o, equivalentemente,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

también suele notarse $Df(a)$ o $\dfrac{d}{dx} f(a)$.

1.2.1. Interpretación geométrica de la derivada puntual

La recta secante a la gráfica de f —es decir, a la curva $y = f(x)$— que pasa por los puntos $\langle a, f(a)\rangle$ y $\langle a+t, f(a+t)\rangle$ tiene por pendiente a $(f(a+t) - f(a))/t$, por lo que en el límite $(t \to 0)$, esto es, en el punto $\langle a, f(a)\rangle$, el valor es precisamente el de la *pendiente de la recta tangente* a la curva $y = f(x)$ en dicho punto $\langle a, f(a)\rangle$; este valor es precisamente $f'(a)$.

Teorema 55 (*Ecuación de la tangente a $y = f(x)$ en $\langle a, f(a)\rangle$*).— Si f es derivable en a, entonces existe la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\langle a, f(a)\rangle$, siendo, como hemos visto, $f'(a)$ la pendiente de esta recta tangente en este punto. Por esto, la ecuación de dicha recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

1.2.2. Función derivada

Definición 1.14 (Función derivable en un conjunto).— Decimos que una función es *derivable en un conjunto* si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto.

Definición 1.15 (Función derivada de una función).— Si f es derivable en $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces la *función derivada* de f es $f' : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Definición 1.16 (Funciones derivadas sucesivas).— Si f' es derivable, hablamos de su función derivada, la *función derivada segunda* de f, que notamos f'', $D^2 f$ o $\dfrac{d^2}{dx^2} f$; si ésta es derivable, tenemos su función derivada, la *función derivada tercera* de f, que notamos f''', $D^3 f$ o $\dfrac{d^3}{dx^3} f$, y

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

así sucesivamente, hablamos, en general, de la *función derivada enésima* de f, que notamos $f^{(n}$, $D^n f$ o $\dfrac{d^n}{dx^n} f$.

1.2.3. Derivadas laterales

Definición 1.17 (Derivada por la izquierda de una función f en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con A abierto, $a \in A$, es el siguiente límite siempre que éste exista y sea un número real:

$$f'(a^-) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

o, equivalentemente,

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

también suele notarse $Df(a^-)$ o $\dfrac{d}{dx} f(a^-)$.

Definición 1.18 (Derivada por la derecha de una función f en a).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con A abierto, $a \in A$, es el siguiente límite siempre que éste exista y sea un número real:

$$f'(a^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

o, equivalentemente,

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

también suele notarse $Df(a^+)$ o $\dfrac{d}{dx} f(a^+)$.

Teorema 56 (*de caracterización de la derivabilidad puntual de una función*).— La función f es derivable en a si, y sólo si, ambas derivadas laterales de f en a son tienen el mismo valor real.

1.2.4. Continuidad y derivabilidad

Teorema 57.— Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Teorema 58.— Si f es continua en a y las derivadas laterales de f en a tienen el mismo valor real, entonces f es derivable en a.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.2.5. Cálculo de derivadas

Teorema 59 (*Derivadas elementales*).— En los puntos donde las funciones elementales son derivables, sus funciones derivadas son las siguientes:

I. $(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;
II. $\ln' x = 1/x$;
III. $\log_b' x = (\log_b e)/x = 1/(x \ln b)$;
IV. $(a^x)' = a^x \ln a$;
V. $(e^x)' = e^x$;
VI. $\operatorname{sen}' x = cosx$;
VII. $\cos' x = -\operatorname{sen} x$;
VIII. $\tan' x = 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$;
IX. $\cot' x = -1/\operatorname{sen}^2 x = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x$;
X. $\sec' x = \sec x \tan x$;
XI. $\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cot x$;
XII. $\operatorname{arc\,sen}' x = 1/\sqrt{1 - x^2}$;
XIII. $\operatorname{arc\,cos}' x = -1/\sqrt{1 - x^2}$;
XIV. $\operatorname{arctan}' x = 1/(1 + x^2)$;
XV. $\operatorname{arccot}' x = -1/(1 + x^2)$
XVI. $\operatorname{arcsec}' x = 1/(x\sqrt{x^2 - 1})$;
XVII. $\operatorname{arccosec}' x = -1/(x\sqrt{x^2 - 1})$.

Teorema 60 (*Propiedades algebraicas de las derivadas*).— Si f y g son derivables en x, también lo son $f + g$, λf, $f \cdot g$, $1/g$ y f/g (estas dos últimas si $g(x) \neq 0$), siendo sus funciones derivadas las siguientes:

I. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
II. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;
III. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
IV. si $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$;
V. si $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Teorema 61 (*de derivación de la composición: regla de la cadena*).— Si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$, entonces $g(f)$ es derivable en x y su derivada es $g(f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Teorema 62 (*de derivación de la composición: regla de la cadena reiterada*).— Si f es derivable en x, g es derivable en $f(x)$ y h es derivable en $g(f(x))$, entonces $h(g(f))$ es derivable en x y su derivada es $h(g(f))'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Teorema 63 (*de derivación de la función inversa*).— Si f es inyectiva y continua en un entorno abierto de x y f es derivable en x y $f'(x) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y = f(x)$, siendo esta derivada $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 36.

Calculemos la función derivada de la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Un esquema de resolución.— Vía 0.

Sea la función $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por $g(x) = x^2$, cuya función inversa es $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$, esto es, precisamente $f(y)$.

La función g es inyectiva y continua en $(0, \infty)$, y su derivada existe para todo $x \in (0, \infty)$ y es $g'(x) = 2x$; como $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, por el teorema, g^{-1} es derivable en todo punto $y = g(x) = x^2$.

Aplicando la fórmula del teorema en el punto y:

$$\begin{aligned}(g^{-1})'(y) &= \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{2(g^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}},\end{aligned}$$

esto es,

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

por lo que, reescribiendo esta función derivada utilizando x en vez de y:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vía 1.

(Algo más informal). Resulta que $y = f(x) = \sqrt{x}$ es inversa de $x = f^{-1}(y) = y^2$, cuya derivada es $x' = 2y$, por lo que $y' = f'(x) = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{2y}$, de donde, como $y = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En realidad, podríamos incluso decir que esta vía es doblemente informal, pues abrevia el uso de la notación de Leibniz[10]. ■

[10] Teorema de derivación de la función inversa (en notación de Leibniz).— Si $y = f(x)$ es inyectiva y continua en un entorno abierto de x y f es derivable en x y $\frac{dy}{dx} \neq 0$, entonces $x = f^{-1}(y)$ es derivable en $y = f(x)$, siendo esta derivada

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_x} \quad \text{o, de forma compacta,} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Con esta notación, $y = f(x) = \sqrt{x}$ y $x = y^2$; derivando x respecto a y obtenemos $\dfrac{dx}{dy} = 2y$; utilizando el teorema,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y};$$

sustituyendo y por $\sqrt{x}$, queda

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 64 (de derivación logarítmica).— Si f es derivable en x y f toma solamente valores positivos en un entorno abierto de x, entonces la función $z = \ln f$ es derivable en x y su derivada es $z'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, de donde la derivada de f en x es $f'(x) = f(x)z'(x)$.

Ejemplo 37.

Calculemos la función derivada de la función $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida por $f(x) = x^x$.

Un esquema de resolución.— Por definición, f sólo toma valores positivos, además, en $(0,\infty)$, es derivable[11]. Por el teorema, la función $z(x) = \ln(f(x)) = \ln(x^x) = x\ln x$ es derivable en x y su derivada es $z'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$, de donde $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$; así, f', la función derivada de f, está definida donde el logaritmo natural, esto es, para todo $x \in (0,\infty)$. ■

Teorema 65 (de derivación implícita).— Sea una ecuación que define implícitamente a $y = f(x)$ como una función derivable de x en un entorno abierto de x. Si la expresión resultante de sustituir y por $f(x)$ en la ecuación da lugar a una composición de funciones derivables respecto de x, entonces $f'(x)$ puede obtenerse derivando respecto de x ambos miembros de la ecuación y despejando algebraicamente dicha derivada.

Ejemplo 38.

Hallemos la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P_0(x_0, y_0)$ perteneciente a ella siendo ésta:

I. la parábola $y^2 = 2px$ (donde el parámetro geométrico p representa la distancia del foco a la directriz);
II. la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$;
III. la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
IV. la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Un esquema de resolución.— I. Si $y_0 = 0$, entonces $(x_0, 0)$ es el vértice de la parábola y su tangente en este punto es la recta $x = x_0$. Sea, pues, $y_0 \neq 0$; la expresión resultante de sustituir y por $f(x)$ en la ecuación $y^2 = 2px$ de la parábola es $f(x)^2 = 2px$, esto es, $f(x) = \pm\sqrt{2px}$, donde tanto $\sqrt{2px}$ como $-\sqrt{2px}$ son composiciones de funciones derivables respecto de x, siendo $px \geq 0$, en un entorno abierto $(x-\delta, x+\delta)$ de x $(\delta > 0)$, por lo que por el teorema, podemos derivar ambos miembros de la igualdad, esto es, $2f(x)f'(x) = 2p$, es decir, $f(x)f'(x) = p$, y despejar algebraicamente la derivada, o sea, $f'(x) = \dfrac{p}{f(x)}$, encontrando así que la pendiente de la tangente a f en P_0 es $f'(x_0) = \dfrac{p}{f(x_0)} = \dfrac{p}{y_0}$, por lo que la ecuación de la recta tangente en P_0 es $y - y_0 = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0)$, de donde $yy_0 - y_0^2 = px - px_0$, esto es,

[11] Para todo $x \in (0,\infty)$, $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$; como el exponente es el producto de dos funciones derivables en $(0,\infty)$ y la exponencial es derivable en $\mathbb{R}$, por la regla de la cadena, f es derivable en $(0,\infty)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

$yy_0 = px + y_0^2 - px_0 = px + 2px_0 - px_0$, luego la ecuación de la recta tangente a la parábola en P_0 es $y_0 y = p(x + x_0)$.

II. Si $y_0 = 0$, entonces su tangente en $(x_0, 0)$ es la recta $x = x_0$. Si $y_0 \neq 0$... [✍].

III. Si $y_0 = 0$, entonces su tangente en $(x_0, 0)$ es la recta $x = x_0$. Si $y_0 \neq 0$... [✍].

IV. Si $y_0 = 0$, entonces su tangente en $(x_0, 0)$ es la recta $x = x_0$. Si $y_0 \neq 0$... [✍]. ■

Por curiosidad, ¿cuáles son las ecuaciones de las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella? [✍].

1.2.6. Ejercicios resueltos

Cubit 71.

Estudio de la continuidad y derivabilidad de $|x^2 - 121|$ en $\mathbb{R}$.

Un esquema de resolución.— Por definición de valor absoluto:

$$|x^2 - 121| = \left\{ \begin{array}{ll} 121 - x^2 & \text{si } x^2 - 121 < 0 \\ x^2 - 121 & \text{si } 0 \leq x^2 - 121 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 121 - x^2 & \text{si } x \in (-11, 11) \\ x^2 - 121 & \text{si } x \in (-\infty, -11] \cup [11, \infty) \end{array} \right.$$

Por ser polinómica, a trozos, esta función es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-11, 11\}$. Por lo tanto, es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-11, 11\}$.

Veamos qué sucede en los puntos $x = -11$ y $x = 11$:

- $x = -11$:
  - derivabilidad: las derivadas laterales son:
    - $f'(-11^-) = \lim_{x \to -11^-} \frac{f(x) - f(-11)}{x - (-11)} = \lim_{x \to -11^-} \frac{(x^2 - 121) - 0}{x - (-11)} = \lim_{x \to -11^-} \frac{(x + 11)(x - 11)}{x + 11} = \lim_{x \to -11^-} (x - 11) = -22$;
    - $f'(-11^+) = \lim_{x \to -11^+} \frac{f(x) - f(-11)}{x - (-11)} = \lim_{x \to -11^+} \frac{(121 - x^2) - 0}{x - (-11)} = \lim_{x \to -11^+} \frac{(11 - x)(11 + x)}{x + 11} = \lim_{x \to -11^+} (11 - x) = 22$;

    por lo que, como $f'(-11^-) \neq f'(-11^+)$, f no es derivable en $x = -11$;
  - continuidad: los límites laterales son:
    - $\lim_{x \to -11^-} f(x) = \lim_{x \to -11^-} (x^2 - 121) = 0$;
    - $\lim_{x \to -11^+} f(x) = \lim_{x \to -11^+} (121 - x^2) = 0$;

    de donde f es continua en $x = -11$;
- $x = 11$: con un análisis similar al que hemos hecho se deduce que f no es derivable en $x = 11$ aunque sí es continua.

Solución.— La función f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-11, 11\}$. ■

Cubit 72.

Suponiendo que el valor de un texto en bruto fuese el cuadrado de su número de palabras:

a. definamos una función real que represente esta situación;

b. discutamos utilizando derivadas cómo habríamos de partir el texto en dos para que los dos textos obtenidos sumen el mínimo valor posible;

c. ¿cómo habríamos de hacerlo para que sumasen el máximo valor posible?;

d. ¿qué teorema asegura la existencia de dicho máximo y por qué?

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

[EPP 11.11.2024:2.ª.2.A], *cfr.* ejercicio resuelto 9.7 (p. 147) de: Abellanas Rapun, Lorenzo, y Galindo Tixaire, Alberto, *Teoría y problemas de métodos de cálculo*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, ISBN: 84-7615-388-0.

Un esquema de resolución.—

a. Siendo T el conjunto de textos, t un texto y N_t el número de palabras del texto t, sea la función real,

$$\begin{aligned} V :& \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto V(t) = N_t^2 \end{aligned}$$

O bien, una función real de variable real (en realidad, natural de variable natural) de valoración directa de un número de palabras,

$$\begin{aligned} V :& \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto V(n) = n^2 \end{aligned}$$

b. Dado un texto de N palabras, al dividirlo en dos subtextos, éstos tienen x y $N-x$ palabras, respectivamente; sea la siguiente función real de variable real que representa el valor agregado de los dos subtextos,

$$\begin{aligned} V_2 :& [0, N] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto V_2(x) = x^2 + (N-x)^2 \end{aligned}$$

que simplificada es $V_2(x) = 2x^2 - 2Nx + N^2$ (una parábola).
Los puntos críticos son las raíces de la primera derivada:

$$\begin{aligned} V_2'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x - 2N = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{N}{2} \end{aligned}$$

Como $V_2''(x) = 4$, entonces $V_2''(N/2) > 0$, por lo que el criterio de la segunda derivada sobre extremos locales nos informa de que en $x = N/2$ la función V_2 alcanza un mínimo local —un mínimo en el abierto $(0, N)$—.

c. El criterio de la segunda derivada ha localizado un mínimo local en el abierto $(0, N)$, pero dicho criterio no explora los extremos de este intervalo. Para $x = 0$ y $x = N$, la función V_2 toma el mismo valor, a saber, $V_2(0) = V_2(N) = N^2$. Por otra parte, como $V_2(x)$ alcanza en $x = N/2$ el único mínimo en $(0, N)$, V_2 es estrictamente decreciente a la izquierda de $N/2$ y estrictamente creciente a la derecha de $N/2$. En otras palabras, N^2 es un valor máximo de V_2 que se alcanza en los extremos del intervalo $(0, N)$.
A modo de ejemplo, pudiésemos visualizar la parábola V_2 para $N = 3$, por ejemplo, en Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
representa 2x^2 - 2*3*x + 3^2 de x=0 a 3
```

La conclusión es que si buscásemos el valor máximo no debiésemos partir el texto (si, debido a lo que fuese, tuviésemos necesariamente que partir el texto en dos, el valor máximo se alcanzaría con un subtexto de una palabra y el otro subtexto con $N-1$ palabras).

d. El teorema de Weierstrass para continuidad, pues afirma que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo y su máximo en dicho cerrado.

■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cubit 73.

¿Cuáles son todos los puntos singulares de $|\cos x|$?

Un esquema de resolución.— Un punto singular x_0 de una función f es precisamente aquél para el que $f'(x_0^-)\neq f'(x_0^+)$; estudiemos el caso de $|\cos x|$:

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\in\cdots\cup\left[\dfrac{-5\pi}{2},\dfrac{-3\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]\cup\cdots\\ -\cos x & \text{si } x\in\cdots\cup\left[\dfrac{-7\pi}{2},\dfrac{-5\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}\right]\cup\cdots\end{cases}$$

por lo que

$$|\cos x|'=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si } x\in\cdots\cup\left(\dfrac{-5\pi}{2},\dfrac{-3\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)\cup\cdots\\ \operatorname{sen} x & \text{si } x\in\cdots\cup\left(\dfrac{-7\pi}{2},\dfrac{-5\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}\right)\cup\cdots\end{cases}$$

en definitiva, son puntos singulares de $|\cos x|$ los puntos $x_0=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$, esto es, los puntos $\ldots,\dfrac{-7\pi}{2},\dfrac{-5\pi}{2},\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2},\ldots$, pues en ellos, $|\cos x|'(x_0^-)=-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=-1$ y $|\cos x|'(x_0^+)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$. ■

Observación 28.— Una expresión algebraica sencilla de la derivada de $|\cos x|$ es:

$$|\cos x|'=-\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{|\cos x|}\,.$$

Observación 29.— Pudiésemos dibujar con SageMath $|\cos x|$ y las tangentes izquierda y derecha en $\pi/2$:

```
var('x h') # declarando las variables
f(x)=abs(cos(x)) # definiendo f
l0i=lim((f(pi/2+h)-f(pi/2))/h,h=0,dir='-') # calculando la derivada
   lateral izquierda de f en pi/2 por definición
l0d=lim((f(pi/2+h)-f(pi/2))/h,h=0,dir='+') # calculando la derivada
   lateral derecha de f en pi/2 por definición
print(l0i,l0d) # mostrando en pantalla el valor de dichas derivadas
   laterales
taniz(x) = l0i * (x - pi/2) + f(pi/2) # definiendo la recta tangente
   izquierda
tander(x) = l0d * (x - pi/2) + f(pi/2) # definiendo la recta tangente
   derecha
plot(f(x),-5,5,color='blue') + plot(taniz(x),pi/2-1,pi/2+1,color='red') +
    plot(tander(x),pi/2-1,pi/2+1,color='green') # dibujando |cos x| y las
    tangentes izquierda y derecha en pi/2
```

1.3. Teoremas de valores intermedios de derivabilidad

Teorema 66 (*del valor medio de* Peano).— Si f, g y h son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $\begin{vmatrix}f'(c) & g'(c) & h'(c)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}=0$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 67 (*del valor medio de Cauchy*).— (Caso particular del teorema del valor medio de Peano para $h(x) = 1$). Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

Teorema 68 (*del valor medio de Lagrange / teorema del valor medio de la pendiente / teorema del valor medio*).— (Caso particular del teorema del valor medio de Cauchy para $g(x) = x$). Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $(b - a)f'(c) = (f(b) - f(a))$.

Teorema 69 (*del valor medio de Rolle*).— (Caso particular del teorema del valor medio de Lagrange para f tal que $f(a) = f(b)$). Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 70 (*Corolario A del teorema de Rolle*).— Siendo $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en X: si f tiene n raíces reales, entonces f' tiene al menos $n - 1$ raíces reales.

Teorema 71 (*Corolario B del teorema de Rolle*).— Siendo $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en X: si f' tiene n raíces reales, entonces f tiene a lo sumo $n + 1$ raíces reales.

Teorema 72 (*Corolario C del teorema de Rolle*).— Siendo $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en X: entre dos raíces reales consecutivas de f', a lo sumo hay una raíz real de f.

Ejemplo 39.

Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$ tiene una única solución real. (*Sugerencia*: Pudiésemos utilizar un corolario del teorema de Rolle relativo al número de raíces de una función y de su derivada, junto al teorema de Bolzano).

[EFO 21.1.2025:I.2.B], *cfr.* ejemplo c (p. 52) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - 1 + 2x$. Su función derivada, $f'(x) = \cos x + 2$, carece de raíces reales (ya que $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -2$), por lo que f tiene como mucho una raíz real [por un corolario del teorema de Rolle: si f' tiene n raíces reales, f tiene a lo sumo $n + 1$ raíces reales]. Por otro lado, como f es continua en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$ [por ser la función suma de las funciones continuas $\operatorname{sen} x$, -1 y $2x$] y $f(0) \cdot f(\pi/2) = (-1) \cdot \pi \leq 0$, existe al menos una raíz real de f en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ [por el teorema de Bolzano]. Uniendo ambos hechos, que f tiene a lo sumo una raíz y que tiene una raíz en $(0, \pi/2)$, concluimos que f tiene una única raíz real y, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$, esto es, $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$, tiene una única solución real. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

1.3.0. Ejercicios resueltos

Cubit 74.

Demostremos el corolario A del teorema del valor medio de ROLLE.

Un esquema de resolución.— Si f tiene n raíces reales, digamos x_1, x_2, …, x_n, por ser derivable f, aplicamos el teorema de ROLLE a cada uno de los $n-1$ intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, lo que proporciona $n-1$ raíces reales. ■

Cubit 75.

(Radar de tramo). Utilicemos algún teorema de valores intermedios de derivación (Peano, Cauchy, Lagrange o Rolle) para resolver la siguiente cuestión: «Un coche que circula por una autopista con límite 120 km/h pasa ante dos radares separados 9 km a las 6 h 12 m y a las 6 h 16 m, respectivamente, y ambos miden 105 km/h. ¿Ha incurrido en infracción de tráfico?».

[EFO 21.1.2025:I.2.A].

Un esquema de resolución.— Sean t_1 y t_2 los instantes de tiempo a los que pasa por el primer y el segundo radar, respectivamente, a saber. Sabemos que $t_2 - t_1 = 4$ minutos. La función espacio $s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ definida por $t \mapsto s(t)$, que asigna a cada instante de tiempo la posición del coche en la autopista en dicho instante, es una función continua en $[t_1, t_2]$ y derivable en (t_1, t_2) (su derivada es la función velocidad). Por el teorema de Lagrange, $\exists t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $s'(t_0)$, esto es, la velocidad en el instante t_0, es igual a $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$, es decir, a $\dfrac{9}{4}$ km/m $\cdot$ 60 m/h = 135 km/h.

Solución.— Sí ha incurrido en una infracción de tráfico, pues hay un momento en el que ha ido a 135 km/h en un tramo limitado a 120 km/h. ■

Observación 30.— Como es lógico, pudiésemos tomar el primer radar como origen del tiempo de interés, esto es, que fuesen t_1 y t_2, 0 minutos y 4 minutos, respectivamente, definiendo entonces la función espacio s en $[0, 4]$.

Cubit 76.

(Búsqueda bibliográfica). Interpretación geométrica del teorema de Cauchy.

Un esquema de resolución.— Es vuestro, disfrutad con la búsqueda [✍]. ■

Cubit 77.

Demostremos el corolario B del teorema del valor medio de ROLLE. (*Sugerencia:* por reducción al absurdo).

Un esquema de resolución.— Supongamos lo contrario, que f tiene al menos $n+2$ raíces reales, digamos x_1, x_2, …, x_{n+2}; por ser derivable f, aplicamos el teorema de ROLLE a cada uno de los $n+1$ intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, …, $[x_{n+1}, x_{n+2}]$, lo que proporciona $n+1$ raíces reales de f', en contra de que ésta sólo tenga n raíces reales; he ahí la contradicción, f' tiene y no tiene n raíces reales, por lo que por reducción al absurdo deducimos el corolario B. ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cubit 78.

Demostremos el corolario C del teorema del valor medio de Rolle. (*Sugerencia:* por reducción al absurdo).

Un esquema de resolución.— Supongamos lo contrario, que al menos haya dos raíces reales, r y s, de f entre dos raíces reales consecutivas, r' y s', de f'; entonces, por ser derivable f, aplicamos el teorema de Rolle al intervalo $[r,s]$, lo que proporciona al menos un $c \in (r,s)$ tal que $f'(c) = 0$; en otras palabras, r' y s' no serían raíces reales consecutivas de f' ya que $r' < r < c < s < s'$; he ahí la contradicción, r' y s' son y no son raíces reales consecutivas de f', por lo que por reducción al absurdo deducimos el corolario C. ■

Cubit 79.

¿Cuántas soluciones reales tiene una ecuación cúbica reducida $x^3 + rx + s = 0$ en la que $r > 0$?

[EFE 17.6.2026:I.2.A].

Un esquema de resolución.— Esto equivale a preguntarnos cuántas raíces reales tiene la función $f(x) = x^3 + rx + s$, siendo $r > 0$; como, precisamente por ser $r > 0$, $f'(x) = 3x^2 + r$ no tiene raíces reales, entonces, por el corolario B del teorema del valor medio de Rolle, f tiene como mucho una raíz real, por lo que la ecuación cúbica reducida tiene a lo sumo una solución real; como una ecuación cúbica tiene una o tres soluciones reales (pues siempre tiene una solución real y si un complejo es solución, su conjugado también lo es) [✍], entonces concluimos que sólo tiene una. ■

Cubit 80.

Demostremos que la ecuación $5x + 3\operatorname{sen} x = 7$ tiene una única solución real.

[EFO 9.1.2026:I.2.B], [EFE 17.6.2026:I.2.B].

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = 5x + 3\operatorname{sen} x - 7$; su función derivada, $f'(x) = 5 + 3\cos x$, carece de raíces reales (ya que $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = \frac{-5}{3}$ [pues $(\forall x \in \mathbb{R})(-1 \leq \cos x \leq 1)$]), por lo que f tiene como mucho una raíz real [por el corolario B del teorema de Rolle: si f' tiene n raíces reales, f tiene a lo sumo $n+1$ raíces reales]; por otro lado, $f(0) = -7 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} - 4 > 0$, y como f es continua en el intervalo cerrado $[0, \frac{\pi}{2}]$ [por ser la función suma de las funciones continuas $5x$, $3\operatorname{sen} x$ y -7], existe al menos una raíz real de f en el intervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$ [por el teorema de Bolzano]; uniendo ambos hechos, que f tiene a lo sumo una raíz y que tiene una raíz en $(0, \frac{\pi}{2})$, concluimos que f tiene una única raíz real y, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$, esto es, $5x - 3\operatorname{sen} x = 7$, tiene una única solución real. ■

Ejemplo 40.

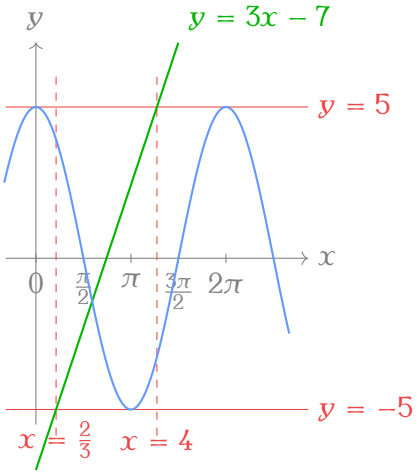
Demostremos que la ecuación $3x - 5\cos x = 7$ tiene una única solución real.

[EPP 10.11.2025:I.2.A].

Un esquema de resolución.— Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, tenemos que $-5 \leq 5\cos x \leq 5$; la recta $3x - 7$ corta a la recta $y = -5$ en $x = \frac{2}{3}$ y a la recta $y = 5$ en $x = 4$, en otras palabras, la raíz

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

buscada está en $\left[\frac{2}{3}, 4\right]$. Trazando la gráfica de la situación, podemos incluso precisar algo más: la raíz se encuentra en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



El teorema de Bolzano lo confirma; en efecto: la función $f(x) = 3x - 5\cos x - 7$ es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ por ser suma de productos de continuas, sucediendo además que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{\pi}{2} - 7 < 0$ y $f(\pi) = 3\pi - 2 > 0$, por lo que por dicho teorema existe una raíz de f en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Por otra parte, $f'(x) = 3 + 5\operatorname{sen} x = 0$ si, y sólo si, $\operatorname{sen} x = \frac{-3}{5}$, ecuación que por ser $\operatorname{sen} x$ negativo sólo en el tercer y cuarto cuadrantes, no tiene solución en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (segundo cuadrante), en otras palabras, f' no tiene ninguna raíz en este intervalo. Por el corolario B del teorema de Rolle, f —que es derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$— tiene como mucho una raíz en este intervalo, lo que sumado al hecho proporcionado por el teorema de Bolzano nos lleva a concluir que f tiene una única raíz en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Resta demostrar que f no tiene ninguna raíz ni en $\left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ni en $[\pi, 4]$.

En $\left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x > 0$, por lo que $f'(x) = 3 + 5\operatorname{sen} x > 0$, de donde f es estrictamente creciente en este intervalo y como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{\pi}{2} - 7 < 0$, f no toma el valor cero en dicho intervalo, esto es, f no tiene ninguna raíz en $\left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En $[\pi, 4]$, $f(\pi) = 3\pi - 5\cos\pi - 7 = 3\pi - 2 > 0$, y $f(4) = 3\cdot 4 - 5\cos 4 - 7 = 5 - 5\cos 4$, que como $-1 < \cos 4 < 0$ (ya que $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos\pi = -1$ y $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$), entonces $f(4) = 5 + 5|\cos 4| > 0$; por otra parte, $f'(x) = 3 + 5\operatorname{sen} x$ tiene una raíz en $[\pi, 4]$, a saber, $\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}$ —un $r \in [\pi, 4]$ particular que satisface $\operatorname{sen} r = \frac{-3}{5}$—, y como $f''(x) = 5\cos x$ no tiene ninguna raíz en $[\pi, 4]$ —pues $\forall x \in [\pi, 4]$, $\cos x < 0$—, por el corolario B del teorema de Rolle, deducimos que f' tiene sólo esa raíz en $[\pi, 4]$; y, por otra, $\operatorname{sen} x$ es estrictamente decreciente en $[\pi, 4]$, por lo que: por un lado, si $\pi \leq x < \pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}$, entonces $\operatorname{sen} x > \frac{-3}{5}$, de donde $f'(x) = 3 + 5\operatorname{sen} x > 3 + 5\frac{-3}{5} = 0$, es decir, f es estrictamente creciente en $\left[\pi, \pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}\right)$; y, por otro, si $\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5} \leq x < 4$, entonces $\operatorname{sen} x < \frac{-3}{5}$, de donde $f'(x) = 3 + 5\operatorname{sen} x < 3 + 5\frac{-3}{5} = 0$, es decir, f es estrictamente decreciente en $\left(\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}, 4\right]$. En definitiva, en el intervalo $[\pi, 4]$, f alcanza un máximo local en $\pi + \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}$, siendo positiva en los extremos, por lo que en ningún momento toma el valor cero, esto es, f no tiene ninguna raíz en $[\pi, 4]$. ■

Cubit 81.

Demostremos que si $0 < r < s$, entonces $1 - \dfrac{r}{s} < \ln\left(\dfrac{s}{r}\right) < \dfrac{s}{r} - 1$.

[EFE 22.5.2025:I.2.A], [EFE 20.6.2025:I.2.A].

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = \ln x$; por una parte, como $0 < r < s$, f es continua en $[r,s]$ y derivable en (r,s), por lo que, por el teorema de LAGRANGE, existe $x_0 \in (r,s)$ tal que $\ln s - \ln r = \frac{1}{x_0}(s-r)$ (1); por otra, de $x_0 \in (r,s)$ se sigue que $\frac{1}{s} < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{r}$, de donde, multiplicando por $s-r > 0$, $\frac{1}{s}(s-r) < \frac{1}{x_0}(s-r) < \frac{1}{r}(s-r)$ (2); sustituyendo (1) en (2): $\frac{1}{s}(s-r) < \ln s - \ln r < \frac{1}{r}(s-r)$, esto es, $\frac{s-r}{s} < \ln\left(\frac{s}{r}\right) < \frac{s-r}{r}$, es decir, $1 - \frac{r}{s} < \ln\left(\frac{s}{r}\right) < \frac{s}{r} - 1$. ■

Cubit 82.

¿En qué intervalos de números reales podríamos aplicar el teorema de ROLLE a la función $f(x) = \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$?

[EPP 11.11.2024:2.ª.2.B], [EFE 22.5.2025:I.2.B], [EFE 20.6.2025:I.2.B], [EFO 9.1.2026:I.2.A].

Un esquema de resolución.— El teorema de Rolle para funciones reales de variable real afirma que si una función f es continua en un cerrado $[a,b]$, derivable en el abierto (a,b) y satisface que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Analicemos qué sucede con los tres requisitos.

I. Continuidad.— La función $f(x) = \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$, esto es,

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto &f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{1+x}{1-x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

es una función racional (cociente de polinomios) a trozos —funciones que sabemos que son continuas salvo en los puntos que anulan su denominador—, es decir, en cada trozo es continua en $\mathbb{R}$ menos en los puntos que anulan el denominador, $x = -1$ si $x \leq 0$ y $x = 1$ si $x \geq 0$. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en aquellos intervalos que contienen a -1 o a 1.

II. Derivabilidad.— Por ser $f(x)$ una función racional $|x|$ no es derivable en $x = 0$, por lo que debemos analizar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$ (no es posible aplicar la regla de la cadena, pues ésta asume la derivabilidad). Como la función es distinta a los lados de $x = 0$, debemos analizar la derivabilidad lateral. Por un lado, la derivada por la izquierda en $x = 0$ es -2, en efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}(f(0+h) - f(0)) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left(\frac{1-(0+h)}{1+(0+h)} - 1\right) \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \cdot \frac{1-h-1-h}{1+h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h}{1+h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2}{1+h} \\ &= -2; \end{aligned}$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

por otro, la derivada lateral derecha en $x = 0$ es 2:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(f(0+h) - f(0)) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{1+(0+h)}{1-(0+h)} - 1\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot\frac{1+h-1+h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot\frac{2h}{1+h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2}{1+h}\\ &= 2.\end{aligned}$$

En definitiva, $f(x)$ no es derivable en 0. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en aquellos intervalos que contienen a 0.

III. $f(a) = f(b)$.— Veamos:

$$\begin{aligned}f(a) = f(b) &\leftrightarrow \frac{1+|a|}{1-|a|} = \frac{1+|b|}{1-|b|}\\ &\leftrightarrow (1+|a|)(1-|b|) = (1-|a|)(1+|b|)\\ &\leftrightarrow 1-|b|+|a|-|a||b| = 1+|b|-|a|-|a||b|\\ &\leftrightarrow 2|a| = 2|b|\\ &\leftrightarrow |a| = |b|\\ &\leftrightarrow a = \pm b,\end{aligned}$$

y esto último define un intervalo que contiene a 0, concretamente un intervalo de centro 0 y radio a. Luego, el teorema de Rolle no es aplicable a $f(x)$ en ningún intervalo real, pues los que contuviesen a 0 habían quedado descartados como consecuencia del requisito de derivabilidad. ■

1.4. Crecimiento, extremos locales, concavidad y optimización

Definición 1.19 (Crecimiento en un punto).— Una función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A su dominio, es *estrictamente creciente* en $x_0 \in A$ precisamente si existe un entorno de x_0 en A, digamos $(x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, tal que $\forall x, x' \in (x_0 - h, x_0 + h)$, si $x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$. (No lo es estrictamente si permitimos $f(x) \leq f(x')$).

Definición 1.20 (Decrecimiento en un punto).— Una función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A su dominio, es *estrictamente decreciente* en $x_0 \in A$ precisamente si existe un entorno de x_0 en A, digamos $(x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, tal que $\forall x, x' \in (x_0 - h, x_0 + h)$, si $x < x'$, entonces $f(x) > f(x')$. (No lo es estrictamente si permitimos $f(x) \geq f(x')$).

Definición 1.21 (Función constante en un punto).— Una función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A su dominio, es *constante* en $x_0 \in A$ precisamente si existe un entorno de x_0 en A, digamos $(x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, tal que $\forall x, x' \in (x_0 - h, x_0 + h)$, si $x < x'$, entonces $f(x) = f(x')$.

Definición 1.22 (Función creciente, decreciente o constante en un abierto).— Una función es (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente o constante en un subconjunto abierto (a, b) de su dominio precisamente si lo es en todos los puntos de dicho abierto.

Definición 1.23 (Monotonía).— Una función es monótona en un punto o en un conjunto preci-

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

samente si es creciente, decreciente o constante en dicho punto o conjunto, siendo estrictamente monótona precisamente si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema 73 (*Criterios de la derivada primera, I*).— Si f es derivable en (a,b), entonces:
- si $f'(x) \leq 0$ si $x \in (a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b);
- si $f'(x) < 0$ si $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a,b);
- si $f'(x) \geq 0$ si $x \in (a,b)$, entonces f es creciente en (a,b);
- si $f'(x) > 0$ si $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a,b);
- si $f'(x) = 0$ si $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).

Definición 1.24 (Mínimo local).— Una función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A su dominio, presenta un *mínimo local estricto* en $x_0 \in A$ precisamente si existe un entorno de x_0 en A, digamos $(x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, tal que $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, $f(x_0) < f(x)$. (No es estricto si permitimos $f(x_0) \leq f(x)$).

Definición 1.25 (Máximo local).— Una función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A su dominio, presenta un *máximo local estricto* en $x_0 \in A$ precisamente si existe un entorno de x_0 en A, digamos $(x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, tal que $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, $f(x) < f(x_0)$. (No es estricto si permitimos $f(x) \leq f(x_0)$).

Teorema 74 (*Criterios de la derivada primera, II*).— Si f es continua en x_0 y $\exists r > 0$ tal que:
- $f'(x) < 0$ si $x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces f alcanza un mínimo local estricto en x_0;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces f alcanza un máximo local estricto en x_0.

Definición 1.26 (Concavidad hacia arriba).— Una función f es *estrictamente convexa* (o, sinónimamente, *estrictamente cóncava hacia arriba*) en el intervalo abierto (a,b) precisamente si $\forall x, x' \in (a,b)$, la recta que pasa por los puntos $\langle x, f(x)\rangle$ y $\langle x', f(x')\rangle$ queda por encima de la gráfica de f en el intervalo (x, x'). (No lo es estrictamente si la recta se superpone a la gráfica).

Definición 1.27 (Concavidad hacia abajo).— Una función f es *estrictamente cóncava* (o, sinónimamente, *estrictamente cóncava hacia abajo*) en el intervalo abierto (a,b) precisamente si $\forall x, x' \in (a,b)$, la recta que pasa por los puntos $\langle x, f(x)\rangle$ y $\langle x', f(x')\rangle$ queda por debajo de la gráfica de f en el intervalo (x, x'). (No lo es estrictamente si la recta se superpone a la gráfica).

Definición 1.28 (Punto de inflexión).— Decimos que x_0 es un *punto de inflexión* de f precisamente si la recta tangente a la gráfica de f en $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ atraviesa dicha gráfica.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 75 (*Criterios de la derivada segunda, I*).— Si f es dos veces derivable en (a, b), entonces:
- si $f''(x_0) \geq 0$, entonces f es convexa (cóncava hacia arriba) en (a, b);
- si $f''(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente convexa (estrictamente cóncava hacia arriba) en (a, b);
- si $f''(x_0) \leq 0$, entonces f es cóncava (cóncava hacia abajo) en (a, b);
- si $f''(x_0) < 0$, entonces f es estrictamente cóncava (estrictamente cóncava hacia abajo) en (a, b);
- si $\exists x_0 \in (a, b)$ y $\exists r > 0$ tal que $f''(x) < 0$ si $x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f''(x) > 0$ si $x \in (x_0, x_0 + r)$, o bien, tal que $f''(x) > 0$ si $x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces x_0 es un punto de inflexión de f (esto es, la concavidad cambia de sentido en x_0).

Teorema 76 (*Criterios de la derivada segunda, II*).— Si f es dos veces derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, entonces:
- si $f''(x_0) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local estricto en x_0;
- si $f''(x_0) < 0$, entonces f alcanza un máximo local estricto en x_0.

Teorema 77 (*Criterios de la derivada enésima*).— Si f es n veces derivable en x_0 y $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n}(x_0) \neq 0$, entonces:
- si n es par, entonces:
  - si $f^{(n}(x_0) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local estricto en x_0;
  - si $f^{(n}(x_0) < 0$, entonces f alcanza un máximo local estricto en x_0;
- si n es impar y mayor o igual que 3, entonces x_0 es un punto de inflexión de f.

Cubit 83.

Tenemos una bolsa impermeable (dos rectángulos cosidos por tres lados) de dimensiones A cm la boca y B cm la profundidad; queremos conocer las dimensiones x, y, z, en cm, de la caja rectangular de mayor volumen que es posible cubrir completamente con dicha bolsa.

Un esquema de resolución.— En la caja rectangular, el perímetro de la boca es $2x + 2y = A$ (1), y la longitud a cubrir es $z + x/2 = B$ (2). El volumen de la caja viene dado por una función de tres variables $h(x, y, z) = xyz$ (3); transformémosla en una función de una variable. Para ello, primero despejamos y de (1) y sustituimos en (3), quedando una función de dos variables, $g(xz) = \left(\frac{A}{2} - x\right) xz$ (4), y segundo, despejamos z de (2) y sustituimos en (4), obteniendo una función de una variable, $f(x) = \left(\frac{A}{2} - x\right) x \left(B - \frac{x}{2}\right)$. Su derivada es $f'(x) = \frac{3x^2}{2} - \left(\frac{A}{2} + 2B\right) x + \frac{AB}{2}$, cuyas raíces son $x_0 = \frac{1}{6}\left(A + 4B + \sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2}\right)$ y $x_1 = \frac{1}{6}\left(A + 4B - \sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2}\right)$. Su segunda derivada es $f''(x) = 3x - \left(\frac{A}{2} + 2B\right)$. Los valores de ésta para los puntos críticos son $f''(x_0) = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(A - 4B)^2 + 4AB} > 0$ y $f''(x_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{(A - 4B)^2 + 4AB} < 0$. Por lo tanto, la función volumen alcanza un máximo para x_1. Así, las dimensiones de la caja de mayor volumen son: $x = \frac{1}{6}\left(A + 4B - \sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2}\right)$, $y = \frac{1}{6}\left(2A - 4B + \sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2}\right)$, $z = \frac{1}{12}\left(-A + 8B + \sqrt{A^2 - 4AB + 16B^2}\right)$. ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Observación 31.— Un ejemplo: si $A = 40$ y $B = 50$, las dimensiones son: $x = 40 - \frac{20}{3}\sqrt{21}$, $y = -20 + \frac{20}{3}\sqrt{21}$ y $z = 30 + \frac{10}{3}\sqrt{21}$. (*Vid.* la cuestión 8.ª de la Práctica TRES).

Observación 32.— El enunciado peca de ambiguo; sobreentendemos dos cosas: primera, que la medida de la boca, A cm, se refiere a todo el perímetro de la boca (si no, lo mismo hubiese dicho «de dimensiones A cm un labio», en cuyo caso la ecuación (I) hubiese sido $x + y = A$), y segunda, no nos olvidamos de la impermeabilidad al interpretar lo de cubrir completamente imaginando el transporte boca abajo, sin necesidad de cubrir la parte de abajo, de forma que al estar cubierto el resto, la caja no se mojase, esto es, que bastaría cubrir justo hasta el borde de la cara de abajo para que la caja quede completamente cubierta de la lluvia. Claro que otra interpretación hubiese sido que la caja debiese quedar por completo envuelta en la bolsa; entonces, la ecuación (2) hubiese sido $z + x/2$ [la mitad de abajo] $+ x/2$ [la mitad de arriba] $= B$.

Cubit 84.

Demostremos que $(\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x)(1 + x \leq e^x)$.

Un esquema de resolución.— Sea $f(x) = e^x - x - 1$, que es derivable en $\mathbb{R}$ (y, por lo tanto, continua en $\mathbb{R}$); entonces $f'(x) = e^x - 1$, que como $e > 1$, $f'(x) > 0$ si $x > 0$; en otras palabras, f es estrictamente creciente si $x > 0$; por lo tanto, $1 + x \leq e^x$. ■

Cubit 85.

Tenemos una antigua ventana tapiada en forma de elipse vertical; el eje vertical mide 6 m y el eje horizontal mide 4 m; queremos hacer una ventana rectangular sin picar más allá de lo tapiado; para ello abriremos el máximo hueco rectangular inscrito en dicha elipse; buscamos la máxima luz; ¿cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para maximizar su área y cuál es el valor de tal área máxima?

[EPP 10.11.2025:I.2.B].

Un esquema de resolución.— La ecuación de esta elipse es $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ec. 1); pensando en la esquina del rectángulo inscrito situada en el primer cuadrante y en que sus coordenadas sean, digamos, (x, y), las dimensiones del rectángulo son $2x$ y $2y$, por lo que el área de dicho rectángulo inscrito es $2x2y$; por esto, definimos una función de cálculo de dicha área en dos variables $g(x, y) = 2x2y$ (ec. 2), que reducimos a una función en una variable, despejando y de (ec. 1) y sustituyendo en (ec. 2): $f(x) = 2x2\left(3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) = 12x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 6x\sqrt{4 - x^2}$, siendo $[0, 2]$ el dominio restringido de interés de f; según el teorema del máximo y el mínimo de Weierstrass, por ser f continua en $[0, 2]$, alcanza un mínimo y un máximo absoluto en $[0, 2]$; como $f(0) = f(2) = 0$ y $f(x) > 0$ si $x \in (0, 2)$, f alcanza el mínimo absoluto en 0 y en 2 y debe alcanzar el máximo absoluto en $(0, 2)$, en los conocidos como puntos críticos de f; por una parte, $f'(x) = 6\sqrt{4 - x^2} + 6x\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) = 6\sqrt{4 - x^2} - \frac{6x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{6(4 - x^2) - 6x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{24 - 12x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$; por otra, los puntos críticos de f deben anular su derivada, esto es, deben satisfacer $24 - 12x^2 = 0$, es decir, $x^2 = 2$, o sea, $x = \pm\sqrt{2}$; como los puntos críticos están en $(0, 2)$, el único posible es $\sqrt{2}$, siendo éste donde f alcanza su máximo absoluto; por lo tanto, las dimensiones del rectángulo que maximizan el área son: $2x = 2\sqrt{2}$ y $2y = 2 \cdot 3\sqrt{1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{4}} = 6\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 3 \cdot 2\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, siendo dicha área máxima $2x2y = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 78 (*Regla de L'Hôpital*).— Siendo $\beta \in \mathbb{R} \cup \{a^-, a^+ : a \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\}$ y $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se tiene que: si $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, y $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$ (con g' no nula en algún entorno reducido de β), entonces $\lim\limits_{x\to\beta} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \gamma$.

1.5. Función primitiva, integral indefinida y su cálculo

Definición 1.29 (de primitiva).— Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, decimos que la función $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivable en (a, b) es una *primitiva* de f precisamente si $DF = f$.

Teorema 79.— Si F es una primitiva de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces $F + c$ es una primitiva de f.

Teorema 80.— Si $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ son primitivas de $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces la función diferencia $F - G$ es una función constante.

Este teorema, en otras palabras, establece que si F es una primitiva de f, entonces todas las primitivas de f se obtienen sumando a F una constante.

Este hecho nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.30 (de integral indefinida).— Dada F una primitiva de f, el conjunto $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ se denomina *integral indefinida de* f y se nota $\int f$ o $\int f(x)\,dx$; de f se dice que es el integrando de la integral indefinida.

Teorema 81 (*de linealidad*).— Si $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ son primitivas de $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, respectivamente, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

I. $F + G$ es una primitiva de $f + g$;
II. αF y βG son primitivas de αf y βg, respectivamente;
III. $\alpha F + \beta G$ es una primitiva de $\alpha f + \beta g$;
IV. $\displaystyle\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 82 (*Integrales indefinidas inmediatas*).— Siguiendo el orden y numeración de las derivadas elementales:

I. $\int x^\lambda\,dx = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c \ (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$;

II. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + c \ (x > 0)$;

III. $\int \dfrac{\log_b e}{x}\,dx = \int \dfrac{1}{x\ln b}\,dx = \dfrac{\ln x}{\ln b} + c$;

IV. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \ (a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\})$;

V. $\int e^x\,dx = e^x + c$;

VI. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$;

VII. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$;

VIII. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$;

IX. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$;

X. $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + c$;

XI. $\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$;

XII. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + c$;

XIII. $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c = -\operatorname{arc\,sen} x + c$;

XIV. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$;

XV. $\int \dfrac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccot} x + c = -\arctan x + c$;

XVI. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec}|x| + c = \arctan(\sqrt{x^2-1})$ $(|x| > 1)$ (si $x > 1$, $\operatorname{arcsec} x + c$);

XVII. $\int \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosec}|x| = -\arctan(\sqrt{x^2-1})$ $(|x| > 1)$ (si $x > 1$, $\operatorname{arccosec} x + c$).

Teorema 83 (*de integración indefinida por sustitución / cambio de variable*).— Siendo F una primitiva de f y g una función derivable que admita componerse con F, basta derivar $F(g(x))$ para demostrar que si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, entonces $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$. Este método de cálculo consiste en que ante una integral indefinida en la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, pudiésemos sustituir $t = g(x)$, $dt = g'(x)dx$, encontrando que $\int f(t)\,dt$ es más sencilla de calcular.

Ejemplo 41.

Calculemos $\int x\operatorname{sen} x^2\,dx$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.— Sea $x^2 = t$, entonces $2xdx = dt$, esto es, $dx = \frac{1}{2}dt$. Así, $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx = \int \operatorname{sen} t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t + c$ $(c \in \mathbb{R})$. ■

Observación 33.— Si la cuestión hubiese sido calcular $\int 2x \operatorname{sen} x^2\, dx$, esto es, $\int g'(x)\operatorname{sen}(g(x))\, dx$, respondería a la formulación general $\int g'(x)f(g(x))\, dx = \int f(t)\, dt = F(t) + c$ (haciendo $g(x) = t$ [y, por tanto, $g'(x)\, dx = dt$]). Esto mismo nos permite ver la tabla anterior de integrales indefinidas inmediatas con una función $g(x)$ en vez de x. Por ejemplo,

i. $\int (g(x))^\lambda g'(x)\, dx = \dfrac{(g(x))^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$;

ii. $\int \dfrac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln(g(x)) + c$ $(x > 0)$, etcétera.

Teorema 84 (*de integración indefinida por partes*).— Si $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ son derivables en (a, b), entonces la función producto uv es derivable en a, b y su derivada es $(uv)' = vu' + uv'$, esto es, $D(uv) = vDu + uDv$, de donde integrando ambos miembros, $uv = \int vDu + \int uDv$, en otras palabras,

$$\int uDv = uv - \int vDu.$$

Renombrando las funciones, f y g, en vez de u y v, tenemos la fórmula de cálculo de primitivas por partes:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx.$$

Ejemplo 42.

Calculemos $\int x \cos x\, dx$.

Un esquema de resolución.— Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, esto es, $\int x\cos x\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x\operatorname{sen} x + cosx + c$ $(c \in \mathbb{R})$. ■

1.6. Teoremas de integración definida

Teorema 85 (*de integrabilidad de monótonas*).— Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema 86 (*de integrabilidad de continuas*).— Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 87 (*de linealidad*).— Sean f y g integrables en $[a,b]$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

Teorema 88 (*de subdivisión*).— Sea f integrable en $[a,b]$ y sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Teorema 89 (*de paridad*).— Sea f integrable en $[a,b]$, entonces:

I. si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

II. si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Teorema 90 (*del valor medio integral*).— Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Teorema 91 (*del valor medio integral generalizado*).— Si f y g son continuas en $[a,b]$, con g no negativa, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Teorema 92 (*fundamental del cálculo*).— Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (función integral de f), entonces:

I. F es continua en $[a,b]$;

II. si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en (a,b) y su derivada es f, esto es, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$;

III. si G es tal que $G' = f$ en (a,b), entonces $G = F + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 93 (*regla de Barrow*).— Sea f integrable en $[a,b]$, entonces: si f es continua en $[a,b]$ y F es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Teorema 94 (*de integración por partes*).— Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) con derivadas continuas, entonces $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Teorema 95 (*de integración por sustitución / cambio de variable*).— Si g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con derivada continua y f es continua en $g([a,b])$, entonces $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 43.

Apliquemos el cambio $x = r \operatorname{sen} t$ a la integral $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$.

Un esquema de resolución.— Sea $g(t) = r \operatorname{sen} t$ que es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$ con derivada continua en este intervalo y sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ que es continua en $g\left(\left[a, b\right]\right) = [-r, r]$, teniéndose así que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = r \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = r$ y $g\left(\frac{-\pi}{2}\right) = r \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2} = -r$, por lo que, por el teorema de integración por sustitución, $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen} t)^2} r \cos t\, dt$. ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.7. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes por integración

1.7.0. Longitudes

Teorema 96.— Si f es continua en $[x_0, x_1]$ y derivable en (x_0, x_1), entonces la longitud del arco de la gráfica de f es $\boxed{L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$.

1.7.1. Áreas por secciones paralelas de longitud conocida

Teorema 97 (*de cálculo de áreas por varillas (secciones paralelas de longitud conocida)*).— Distinguimos:

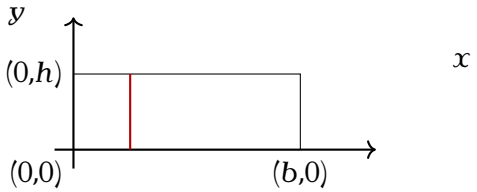
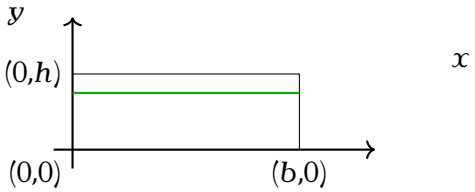
- por varillas verticales (perpendiculares a OX): si $l(x)$ es continua en $[x_0, x_1]$, entonces el área de la región de interés contenida en $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}$ es $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} l(x)dx}$ (siendo $(\forall x \in [x_0, x_1])\ (l(x) \geq 0)$);
- por varillas horizontales (perpendiculares a OY): si $l(y)$ es continua en $[y_0, y_1]$, entonces el área de la región de interés contenida en $\mathbb{R} \times [y_0, y_1]$ es $\boxed{A = \int_{y_0}^{y_1} l(y)dy}$ (siendo $(\forall y \in [y_0, y_1])\ (l(y) \geq 0)$).

Ejemplo 44.

Calculemos el área de un rectángulo de base b y altura h por varillas.

Un esquema de resolución.— Para hacerlo, pudiésemos elegir utilizar varillas verticales o horizontales:

Cálculo del área del rectángulo de base b y altura h por varillas
—apoyamos el rectángulo en el eje OX con su vértice inferior izquierdo en el origen—

varilla vertical longitud $= h$	varilla horizontal longitud $= b$
	
$l(x) = h$ $A = \int_0^b h dx$	$l(y) = b$ $A = \int_0^h b dy$
$A = bh$	

Solución.— Hemos calculado por integración por varillas el área de un rectángulo: base por altura. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

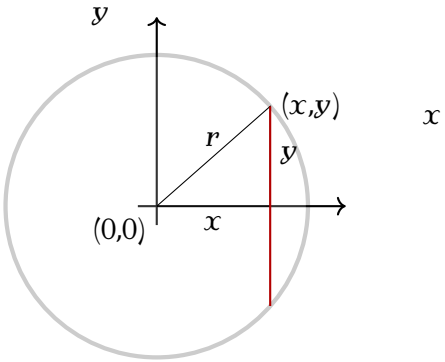
Ejemplo 45.

Calculemos el área de un círculo de centro $(0,0)$ y radio r por varillas.

Un esquema de resolución.— Para hacerlo, pudiésemos elegir utilizar varillas verticales o horizontales:

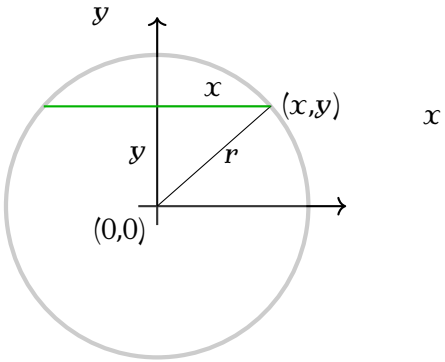
Cálculo del área del círculo de centro $(0,0)$ y radio r por varillas
—(x,y) es uno de los dos puntos comunes de la varilla con la circunferencia—

varilla vertical
longitud $= 2y$



$$l(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$A = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}dx$$

varilla horizontal
longitud $= 2x$



$$l(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$
$$A = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2}dy$$

$$A = \pi r^2$$

Solución.— Hemos calculado por integración por varillas el área de un círculo: π por el cuadrado del radio. ■

Observación 34.— En un ejemplo anterior (p. 96 de esta edición), aplicamos el teorema de integración por sustitución a la integral $\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ con el cambio $x = r \operatorname{sen} t$; recordemos y resolvámosla:

- por una parte, $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2 t)} = r\sqrt{\cos^2 t} = r \cos t$;
- por otra, $dx = r \cos t dt$;
- y por otra,
  - $x = -r \to \operatorname{sen} t = -1 \to t = \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$,
  - $x = r \to \operatorname{sen} t = 1 \to t = \operatorname{arc\,sen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$;

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(r \cos t)(r \cos t)dt \\
&= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\
&= 2r^2 \frac{1}{2} (\operatorname{sen} t \cos t + t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad \text{[por partes]} \\
&= 2r^2 \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2r^2 \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{-\pi}{2} \cos \frac{-\pi}{2} + \frac{-\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$
\begin{aligned}
&= 2r^2\frac{1}{2}\left(1\cdot 0+\frac{\pi}{2}\right)-2r^2\frac{1}{2}\left((-1)\cdot 0+\frac{-\pi}{2}\right)\\
&= 2r^2\frac{\pi}{4}+2r^2\frac{\pi}{4}\\
&= 4r^2\frac{\pi}{4}\\
&= \pi r^2.
\end{aligned}
$$

Observación 35.— Calculemos una primitiva de $\cos^2 t$ por partes: $\int \cos^2 t\,dt = \int \cos t\cos t\,dt = \cos t\,\operatorname{sen} t + \int \operatorname{sen} t\,\operatorname{sen} t\,dt = \cos t\,\operatorname{sen} t + \int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \cos t\,\operatorname{sen} t + \int (1-\cos^2 t)dt = \cos t\,\operatorname{sen} t + t - \int \cos^2 t\,dt$, esto es, $\int \cos^2 t\,dt = \cos t\,\operatorname{sen} t + t - \int \cos^2 t\,dt$, de donde $\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t\cos t + t)$.

Observación 36.— (Otro cambio casi básico). Recordemos que una integral de una función racional de $\sqrt{r^2+x^2}$ se resuelve racionalizando con el cambio $x = r\tan t$. Pudiésemos decir que ambos cambios son casi básicos —en un sentido parecido a cuando decimos que $\int cos^2 x dx$ es una primitiva casi inmediata—.

1.7.2. Volúmenes por secciones paralelas de área conocida

Teorema 98 (*cálculo de volúmenes por láminas/secciones/rebanadas (secciones paralelas de área conocida)*).— Distinguimos:

- por láminas sagitales (perpendiculares a OX): si $A(x)$ (el área conocida) es continua en $[x_0, x_1]$, entonces el volumen de la región tridimensional de interés contenida en $[x_0, x_1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es $\boxed{V = \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx}$;
- por láminas axiales/transversales (perpendiculares a OY): si $A(y)$ (el área conocida) es continua en $[y_0, y_1]$, entonces el volumen de la región tridimensional de interés contenida en $\mathbb{R}\times[y_0, y_1]\times\mathbb{R}$ es $\boxed{V = \int_{y_0}^{y_1} A(y)dy}$;
- por láminas frontales/coronales (perpendiculares a OZ): si $A(z)$ (el área conocida) es continua en $[z_0, z_1]$, entonces el volumen de la región tridimensional de interés contenida en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[z_0, z_1]$ es $\boxed{V = \int_{z_0}^{z_1} A(z)dz}$.

Ejemplo 46.

Calculemos el volumen de una esfera por láminas.

Un esquema de resolución.— Para hacerlo, pudiésemos elegir utilizar láminas sagitales, axiales o frontales, pues en los tres casos se trata de la misma sección, un círculo, cuyo área es bien conocida:

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cálculo del volumen de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio r por láminas
—(x,y,z) es un punto arbitrario en la frontera de la lámina y de la esfera—

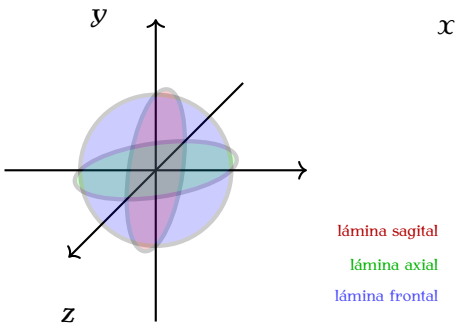
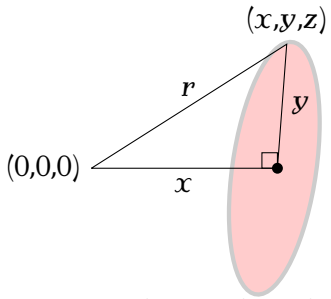
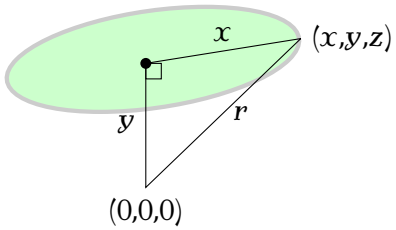
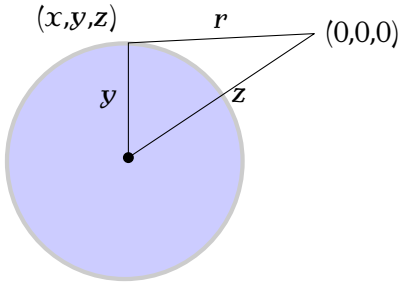


lámina sagital	lámina axial	lámina frontal
radio $= y$	radio $= x$	radio $= y$
centro $= \bullet$	centro $= \bullet$	centro $= \bullet$
		
$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$	$A(y) = \pi x^2 = \pi(r^2 - y^2)$	$A(z) = \pi y^2 = \pi(r^2 - z^2)$
$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx$	$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - y^2)dy$	$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)dz$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

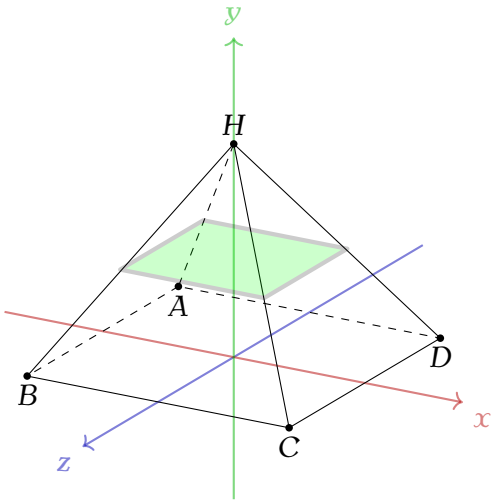
Solución.— Hemos calculado por integración por láminas el volumen de una esfera: cuatro tercios de π por el cubo del radio. ■

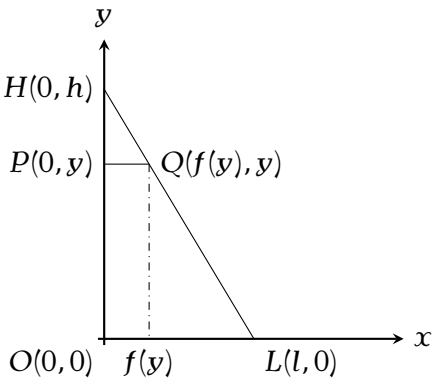
©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Ejemplo 47.

Calculemos el volumen de una pirámide de altura h y base cuadrada de lado l por integración.

Un esquema de resolución.— A la hora de hacerlo, pudiésemos decidir que lo más cómodo es hacerlo utilizando láminas axiales por ser éstas cuadrados; veamos:





La longitud del lado de la lámina axial cuadrada situada a la altura y viene dada por la función $f : [0, h] \longrightarrow [0, l]$, como observamos en la figura, en la que apreciamos que los triángulos OHL y PHQ son semejantes, por lo que $\frac{h}{l} = \frac{h-y}{f(y)}$, de donde $f(y) = \frac{l}{h}(h-y)$, por lo que el área de la lámina axial cuadrada de la pirámide es $f(y)^2 = \frac{l^2}{h^2}(h-y)^2$; por lo tanto, el volumen de la pirámide es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \frac{l^2}{h^2}(h-y)^2\,dy = \frac{l^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2\,dy \\ &= \frac{l^2}{h^2}\int_0^h (h^2 - 2hy + y^2)\,dy = \frac{l^2}{h^2}\left(h^2 y\Big|_0^h - 2h\frac{y^2}{2}\Big|_0^h + \frac{y^3}{3}\Big|_0^h \right) = \frac{l^2}{h^2}\left(h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3} \right) \\ &= \frac{l^2 h}{3}. \end{aligned}$$

Solución.— El volumen de una pirámide de altura h y base cuadrada de lado l es $\frac{l^2 h}{3}$. ■

1.7.3. Áreas por franjas

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Conceptos, teoremas y ejemplos

Teorema 99 (*de cálculo de áreas por franjas verticales*).— Si f y g son continuas en $[x_0, x_1]$, entonces:

I. el área limitada por $x = x_0$, $x = x_1$, $y = f(x)$ e $y = 0$ es $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx}$ si $(\forall x \in [x_0, x_1])\ (f(x) \geq 0)$;

II. el área limitada por $x = x_0$, $x = x_1$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ es $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))dx}$ si $(\forall x \in [x_0, x_1])\ (g(x) \leq f(x))$ (esto es, si f está por encima de g);

III. el área limitada por $x = x_0$, $x = x_1$, $y = f(x)$ e $y = 0$ es $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|dx}$ si $\exists C \subseteq [x_0, x_1]$ tal que $f(x) < 0$ si $x \in C$ (esto es, si hay regiones de área negativa);

IV. el área limitada por $x = x_0$, $x = x_1$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ es $\boxed{A = \int_{x_0}^{x_1} |f(x) - g(x)|dx}$ si $\exists C \subseteq [x_0, x_1]$ tal que $f(x) < g(x)$ si $x \in C$ (esto es, si hay regiones donde f está por debajo de g).

Teorema 100 (*de cálculo de áreas por franjas horizontales*).— Si h y l son continuas en $[y_0, y_1]$, entonces:

I. el área limitada por $y = y_0$, $y = y_1$, $x = h(y)$ y $x = 0$ es $\boxed{A = \int_{y_0}^{y_1} h(y)dy}$ si $(\forall y \in [y_0, y_1])\ (h(y) \geq 0)$;

II. el área limitada por $y = y_0$, $y = y_1$, $x = h(y)$ y $x = l(x)$ es $\boxed{A = \int_{y_0}^{y_1} (h(y) - l(y))dy}$ si $(\forall y \in [y_0, y_1])\ (l(y) \leq h(y))$ (esto es, si h está a la derecha de l);

III. el área limitada por $y = y_0$, $y = y_1$, $x = h(y)$ y $x = 0$ es $\boxed{A = \int_{y_0}^{y_1} |h(y)|dy}$ si $\exists C \subseteq [y_0, y_1]$ tal que $h(y) < 0$ si $y \in C$ (esto es, si hay regiones de área negativa);

IV. el área limitada por $y = y_0$, $y = y_1$, $x = h(y)$ y $x = l(x)$ es $\boxed{A = \int_{y_0}^{y_1} |h(y) - l(y)|dy}$ si $\exists C \subseteq [y_0, y_1]$ tal que $h(x) < l(x)$ si $y \in C$ (esto es, si hay regiones donde h está a la izquierda de l).

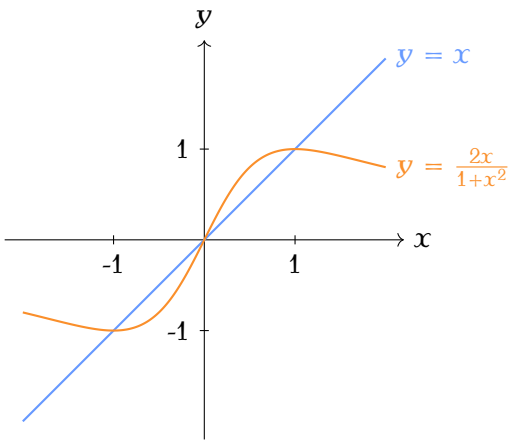
Ejemplo 48.

Calculemos el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = x$ y la curva $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

[EFO 9.1.2026:I.3.A], *cfr.* ejercicio 10.11 (p. 301) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.—



Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Puntos de corte: por un lado, $(0,0)$; por otro $(x \neq 0)$, si $x = \dfrac{2x}{1+x^2}$, entonces $\cancel{x}(1+x^2) = 2\cancel{x}$, esto es, $1+x^2 = 2$, de donde $x = \pm 1$; en definitiva, los puntos de corte son $(-1,-1)$, $(0,0)$ y $(1,1)$.

Situación relativa de las curvas: Para $\dfrac{-1}{2} \in (-1,0)$, $g(-1/2) < f(-1/2)$ y para $\dfrac{1}{2} \in (0,1)$, $f(1/2) < g(1/2)$, esto es, la situación relativa de las curvas es la que vemos en la gráfica.

Área.— Podemos calcularla, por ejemplo, por franjas verticales, que parece menos complicado:

- como dos de tipo II, quedando: $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(x - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{1+x^2} - x\right) dx$;
- como una de tipo IV, que es: $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|x - \frac{2x}{1+x^2}\right| dx$;
- por simetría, ya que $(g-f)(x)$ es una función impar $[(g-f)(-x) = -(g-f)(x)]$: $A = 2\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{1+x^2} - x\right) dx$;

siendo el valor del área de interés $A = \ln 4 - 1$ —es inmediato que $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \ln(1+x^2) + c$ $(c \in \mathbb{R})$—. ■

Ejercicios resueltos

Cubit 86.

Calculemos por franjas horizontales y verticales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$.

[EPP 11.11.2024:3.ª.3.A] (utilizando franjas horizontales), [EFO 21.1.2025:I.3.A] (utilizando franjas verticales), [EFO 17.6.2026:I.3.A] (utilizando franjas horizontales), *cfr.* ejercicio 10.12 (p. 302) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.— Calculemos los puntos de corte de la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$:

$$\begin{aligned}(2x-4)^2 = 4x &\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0,\end{aligned}$$

que tiene por soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, por lo que los puntos de corte son $(1,-2)$ y $(4,4)$.

Por otra parte, la recta corta al eje de abscisas en $(2,0)$ y al eje de ordenadas en $(0,-4)$ y la parábola sólo corta a los ejes en $(0,0)$.

Por franjas horizontales.

Conviene dibujar la situación para tener claro el área de interés y cómo calcularla. Podemos hacerlo, por ejemplo, en Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
área entre las curvas y=2x-4 y y^2=4x
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

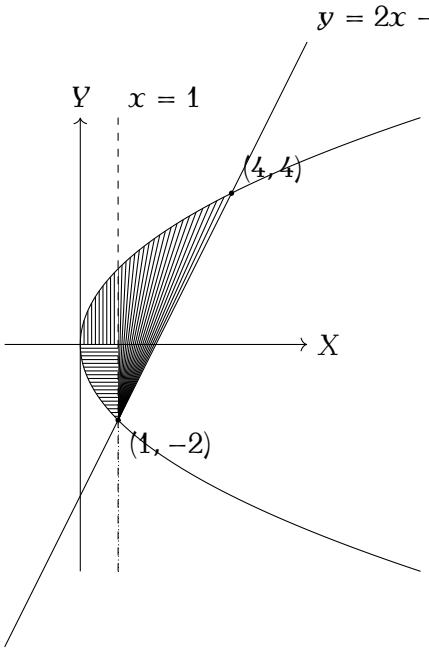
para visualizar el área de interés.

El cálculo por franjas horizontales del área de interés es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy \\ &= \left(\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_{-2}^{4} \\ &= \left(4 + 8 - \frac{64}{12} \right) - \left(1 - 4 + \frac{8}{12} \right) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Por franjas verticales.

Conviene dibujar la situación para tener claro el área de interés y cómo calcularla. En la imagen podemos visualizar dicha área de interés. En el cálculo por franjas verticales del área de interés, ésta es la suma del área de la región rayada verticalmente más el área de la región rayada horizontalmente más el área de la región rayada oblicuamente. La suma de las dos primeras podría hallarse como $\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx$, con $f(x) = \sqrt{4x}$ y $g(x) = -\sqrt{4x}$, o también, independientemente, $\int_0^1 \left(\sqrt{4x} - 0 \right) dx$ la rayada verticalmente y $\int_0^1 \left(0 - \left(-\sqrt{4x} \right) \right) dx$ la rayada horizontalmente. El área de la rayada oblicuamente es $\int_1^4 (f(x) - g(x))\, dx$, con $f(x) = \sqrt{4x}$ y $g(x) = 2x - 4$.



En definitiva, el área total es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{4x}\, dx + \int_0^1 \sqrt{4x}\, dx + \int_1^4 \left(\sqrt{4x} - (2x-4) \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + 2 \int_1^4 \sqrt{x}\, dx - 2 \int_1^4 x\, dx + 4 \int_1^4 1\, dx \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=1}^{x=4} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=4} + 4 \cdot x \Big|_{x=1}^{x=4} \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(4^{3/2} - 1^{3/2} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4^2 - 1^2 \right) + 4 \cdot (4-1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Solución.— El área buscada tiene un valor de 9 unidades de área. ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

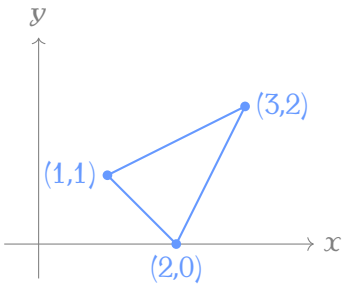
Ejemplo 49.

Siendo el triángulo plano cuyos vértices son (1,1), (2,0) y (3,2), calculemos:
0. las ecuaciones de los lados de dicho triángulo;
1. el área de dicho triángulo por integración utilizando franjas horizontales;
2. el área de dicho triángulo por integración utilizando franjas verticales.

[EFE 22.5.2025:I.3.A] (sólo por franjas horizontales), [EFE 20.6.2025:I.3.A] (sólo por franjas horizontales), [EPP 10.11.2025:I.3.A].

Un esquema de resolución.—

0. Recordemos el trabajo hecho en Cubit 0:



para los puntos $(1,1)$ y $(3,2)$: $y = \dfrac{x+1}{2}$, $x = 2y-1$;
para los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$: $y = 2-x$, $x = 2-y$;
para los puntos $(2,0)$ y $(3,2)$: $y = 2x-4$, $x = \dfrac{y+4}{2}$;

1. Utilizando franjas horizontales:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{y+4}{2} - (2-y)\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{y+4}{2} - (2y-1)\right) dy = \cdots \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 y\,dy - \frac{3}{2}\int_1^2 (y-2)\,dy \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2\cdot 1\right)\right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2. Utilizando franjas verticales:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left(\frac{x+1}{2} - (2-x)\right) dx + \int_2^3 \left(\frac{x+1}{2} - (2x-4)\right) dx = \cdots \\
&= \frac{3}{2}\int_1^2 (x-1)\,dx - \frac{3}{2}\int_2^3 (x-3)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_2^3 \\
&= \cdots \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

1.7.4. Volúmenes de sólidos de revolución

Por discos

Teorema 101 (*de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por discos*).— (Los discos son siempre perpendiculares al eje de rotación). Distinguimos:

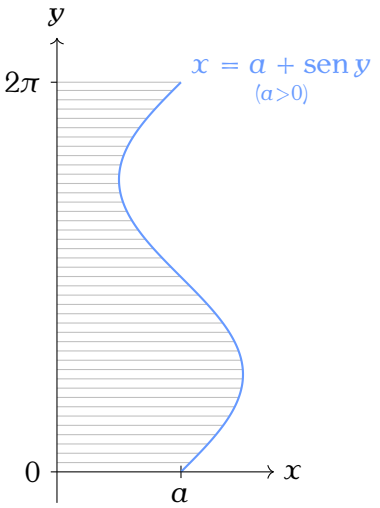
- cálculo por discos verticales (el eje de giro es OX): si $f(x)$ es continua en $[x_0, x_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = \pi \int_{x_0}^{x_1} (f(x))^2 dx}$;
- cálculo por discos horizontales (el eje de giro es OY): si $h(y)$ es continua en $[y_0, y_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = \pi \int_{y_0}^{y_1} (h(y))^2 dy}$.

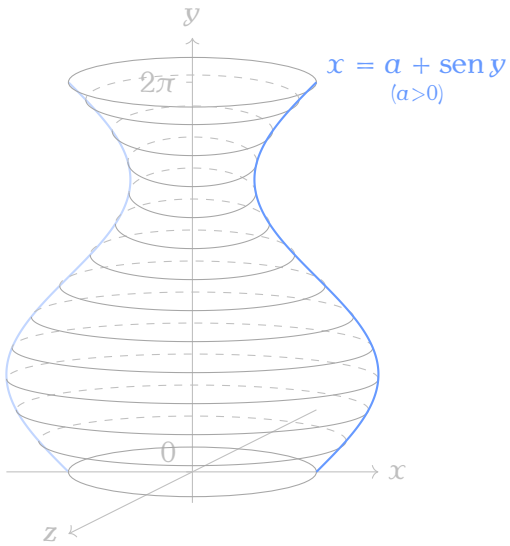
Ejemplo 50.

Seguro que ya sabemos calcular el área sombreada en la primera figura (área limitada por la curva $x = a + \operatorname{sen} y$ $(a > 0)$ y los ejes OX y OY) [✍]; calculemos ahora el volumen del sólido generado por la rotación de dicha curva alrededor del eje OY, limitado dicho sólido por dos planos axiales con una distancia de 2π entre ellos.

[EFE 22.5.2025:I.3.B], [EFE 20.6.2025:I.3.B], [EPP 10.11.2025:I.3.B], *cfr.* ejercicio 11.44, p. 263 de: Fuertes García, Jesús, y Martínez Hernando, Jesús, *Problemas de cálculo infinitesimal*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1997, ISBN: 84-481-1119-2.

Un esquema de resolución.—





Consideremos los planos axiales $y = 0$ (plano XZ) e $y = 2\pi$ (plano a distancia 2π del anterior) y calculemos el volumen por integración utilizando discos horizontales:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (a + \operatorname{sen} y)^2 \, dy = \pi \int_0^{2\pi} (a^2 + 2a \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y) \, dy$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$= \pi a^2 y\Big|_0^{2\pi} + \pi 2a(-\cos y)\Big|_0^{2\pi} + \pi\frac{1}{2}(y - \operatorname{sen} y\cos y)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \pi a^2 2\pi + \pi(\cancel{2a(-\cos 2\pi)} + \cancel{2a\cos 0}) + \pi\left(\frac{1}{2}(2\pi - \operatorname{sen} 2\pi\cos 2\pi) - \frac{1}{2}(0 - \operatorname{sen} 0\cos 0)\right)$$
$$= \pi^2 a^2 2 + \pi\frac{1}{2}2\pi = \pi^2\left(2a^2 + 1\right). \qquad \blacksquare$$

Observación 37.— Cálculo de una primitiva de $\operatorname{sen}^2 y$ por partes: $\int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t\,dt = -\operatorname{sen} t\cos t + \int \cos t\cos t\,dt = -\operatorname{sen} t\cos t + \int \cos^2 t\,dt = -\operatorname{sen} t\cos t + \int(1 - \operatorname{sen}^2 t)dt = -\operatorname{sen} t\cos t + t - \int \operatorname{sen}^2 t\,dt$, esto es, $\int \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\operatorname{sen} t\cos t + t - \int \operatorname{sen}^2 t\,dt$, de donde $\int \operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \operatorname{sen} t\cos t)$.

Observación 38.— Insistamos en estas dos primitivas casi inmediatas:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cos x),$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\cos x);$$

no debiendo olvidarnos de las dos siguientes:

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x,$$
$$\int \cot^2 x\,dx = -x - \cot x.$$

Por arandelas

Teorema 102 (*de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por arandelas*).— (Las arandelas son siempre perpendiculares al eje de rotación). Distinguimos:

- cálculo por arandelas verticales (el eje de rotación es OX): si f y g son continuas en $[x_0, x_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = \pi\int_{x_0}^{x_1}(f(x))^2dx - \pi\int_{x_0}^{x_1}(g(x))^2dx}$;
- cálculo por arandelas horizontales (el eje de rotación es OY): si h y l son continuas en $[y_0, y_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = \pi\int_{y_0}^{y_1}(h(y))^2dy - \pi\int_{y_0}^{y_1}(l(y))^2dy}$.

Cubit 87.

Calculemos el volumen engendrado, al girar alrededor del eje OY, por la región acotada del plano que queda encerrada entre las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la curva $y = \ln(x + 1)$ (*sugerencia:* por arandelas horizontales).

[EPP 11.11.2024:3.ª.3.B], [EFO 17.6.2026:I.3.B], *cfr.* ejercicio 10.18 (p. 305) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.— Conviene dibujar la situación para tener claro el volumen de interés y cómo calcularlo. Pudiésemos hacerlo, por ejemplo, con Wolfram|Alpha (`https://es.wolframalpha.com/`) introduciendo

```
área entre las curvas y=ln(x+1) y x = 0 y x=1 y y=0
```

para visualizar el área de interés, y

```
girar la región entre y=ln(x+1) y y=0, 0<=x<=1, alrededor del eje y
```

para visualizar el sólido de revolución generado.

El cálculo por arandelas horizontales del volumen de interés es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 2} \pi 1^2 dy - \int_0^{\ln 2} \pi (e^y - 1)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\ln 2} (2e^y - e^{2y}) dy \\ &= \pi \left(2e^y - \frac{e^{2y}}{2} \right) \Big|_0^{\ln 2} \\ &= \pi \left(\left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

Por capas

Teorema 103 (*de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por capas cilíndricas/anillos/tubos, siendo los ejes de rotación los ejes cartesianos, OX u OY*).— (Las capas son siempre paralelas al eje de rotación). Distinguimos:

- cálculo por capas verticales (el eje de rotación es $x = 0$ [el eje OY]): si f es continua en $[x_0, x_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} x f(x) dx}$, siendo x la distancia al eje de rotación y $f(x)$ la altura del rectángulo aproximante (el rectángulo que origina por revolución la capa cilíndrica);
- cálculo por capas horizontales (el eje de rotación es $y = 0$ [el eje OX]): si h es continua en $[y_0, y_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} y h(y) dy}$, siendo y la distancia al eje de rotación y $h(y)$ la base del rectángulo aproximante (el rectángulo que origina por revolución la capa cilíndrica).

Cubit 88.

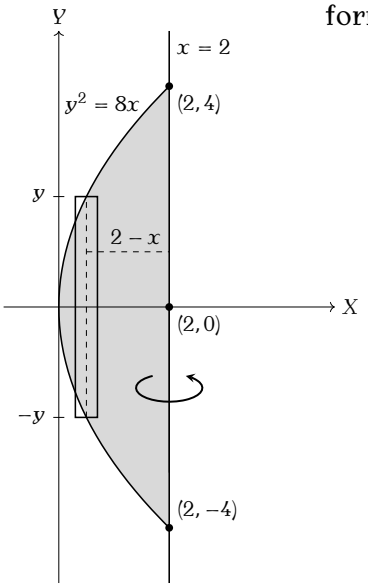
Calculemos el volumen generado por el área plana encerrada entre la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ (su *latus rectum*) al girar alrededor de dicha recta (*sugerencia:* por capas verticales).

[EFO 21.1.2025:I.3.B], *cfr.* problema resuelto 2 (p. 321) de: Ayres, Frank, y Mendelson, Elliot, *Cálculo diferencial e integral*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, 3.ª ed., ISBN: 84-7615-560-3.

Un esquema de resolución.— Para su resolución por capas verticales, debemos tener en cuenta que el rectángulo aproximante es de anchura Δx y de altura $2y$, esto es, $2y = 2\sqrt{8x} =$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$4\sqrt{2x}$, y que su distancia media al eje de rotación es $2-x$; es por esto que el volumen de la capa cilíndrica generada en la rotación de dicho rectángulo aproximante alrededor de la recta $x=2$ tiene un valor de $2\pi\cdot(2-x)\cdot(4\sqrt{2x}\cdot\Delta x)$ unidades de volumen.



Calculamos entonces el valor del volumen pedido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 2\pi(2-x)4\sqrt{2x}\,dx \\
&= 8\sqrt{2}\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= 16\sqrt{2}\pi\int_0^2 \sqrt{x}\,dx - 8\sqrt{2}\pi\int_0^2 x\sqrt{x}\,dx \\
&= 16\sqrt{2}\pi\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=2} - 8\sqrt{2}\pi\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\Big|_{x=0}^{x=2} \\
&= 16\sqrt{2}\pi\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - 8\sqrt{2}\pi\frac{2}{5}\cdot 2^{5/2} \\
&= \frac{256\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de $\dfrac{256\pi}{15}$ unidades de volumen. ■

Teorema 104 (*de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por capas cilíndricas/anillos/tubos, no siendo los ejes de rotación los ejes cartesianos, OX u OY*).— (Las capas son siempre paralelas al eje de rotación). Distinguimos:

- cálculo por capas verticales (el eje de rotación es $x=k$): si f es continua en $[x_0,x_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V=2\pi\int_{x_0}^{x_1}(k-x)f(x)dx}$, siendo $k-x$ la distancia al eje de rotación y $f(x)$ la altura del rectángulo aproximante (el rectángulo que origina por revolución la capa cilíndrica);
- cálculo por capas horizontales (el eje de rotación es $y=k$): si h es continua en $[y_0,y_1]$, entonces el volumen del sólido de revolución es $\boxed{V=2\pi\int_{y_0}^{y_1}(k-y)h(y)dy}$, siendo $k-y$ la distancia al eje de rotación y $h(y)$ la base del rectángulo aproximante (el rectángulo que origina por revolución la capa cilíndrica).

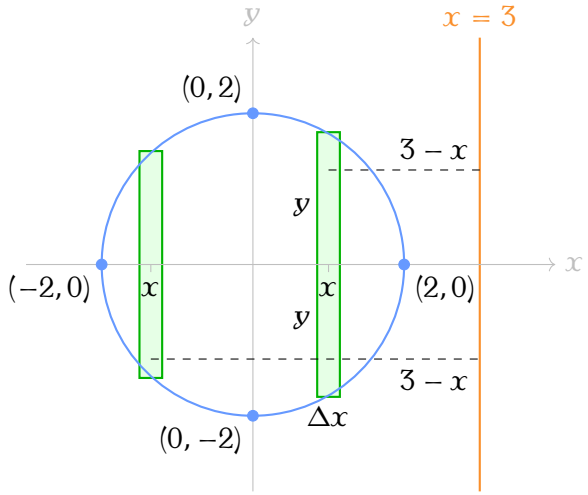
©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

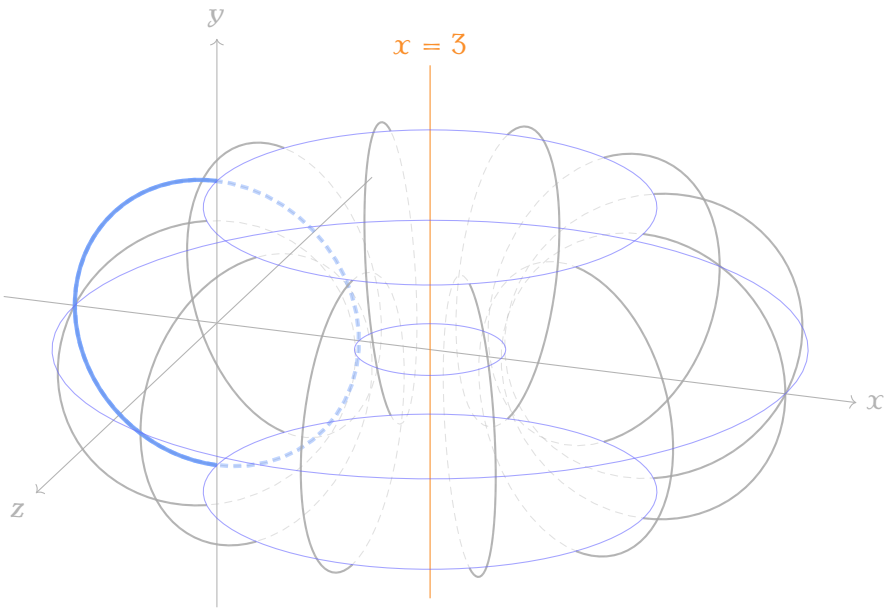
Ejemplo 51.

Calculemos el volumen del toro generado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ al girar alrededor de la recta $x = 3$.

[EFO 9.1.2026:I.3.B].

Un esquema de resolución.— El rectángulo infinitesimal generador de una capa tiene altura $2y$ y anchura Δx. La distancia de dicho rectángulo al eje de rotación es $3-x$ (observemos que si $x < 0$, entonces $3-x = 3+|x|$). El valor de y, por la ecuación de la circunferencia es $y = \sqrt{4-x^2}$. El volumen de la capa cilíndrica generada por dicho rectángulo es $2\pi(3-x)2\sqrt{4-x^2}\Delta x$.





El volumen del toro generado es:

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi(3-x)2\sqrt{4-x^2}\,dx = 4\pi\int_{-2}^{2}(3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= 12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

(esta segunda integral es inmediata e igual a cero)

$$\begin{aligned}
&= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi \frac{-1}{3}(4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{2} \\
&= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - 0 \\
&= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{2^2-x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral aplicamos el teorema de integración por sustitución con el cambio $x = 2\operatorname{sen} t$ (como hicimos en la observación primera de la página 98):

- por una parte, $\sqrt{2^2-x^2} = \sqrt{2^2-2^2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2^2(1-\operatorname{sen}^2 t)} = 2\sqrt{cos^2 t} = 2\cos t$;
- por otra, $dx = 2\cos t\,dt$;
- y por otra, $x = 2\operatorname{sen} t$ implica:
  - $x = -2 \to \operatorname{sen} t = -1 \to t = \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$,
  - $x = 2 \to \operatorname{sen} t = 1 \to t = \operatorname{arc\,sen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$;

de donde:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{2^2-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos t)(2\cos t)\,dt = 2^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
&= 2^2\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} t\cos t + t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad \text{[por partes]} \\
&= 2^2\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2^2\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{-\pi}{2}\cos\frac{-\pi}{2} + \frac{-\pi}{2}\right) \\
&= 2^2\frac{1}{2}\left(1\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) - 2^2\frac{1}{2}\left((-1)\cdot 0 + \frac{-\pi}{2}\right) = 2^2\frac{\pi}{4} + 2^2\frac{\pi}{4} = 2\cdot 2^2\frac{\pi}{4} = 2\pi;
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$V = 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{2^2-x^2}\,dx = 12\pi\cdot 2\pi = 24\pi^2.$$

Solución.— El volumen del toro generado es $24\pi^2$. ■

1.7.5. Apéndice

Pudiésemos estudiar unos esquemas de resolución de dos cuestiones que complementan el estudio de la sección 1.7, en su momento propuestas como tareas, dos cuestiones cuya entrega resuelta fue optativa y voluntaria (CEOV), concretamente acerca de:

A. *cálculo por integración de centros de masas*;
B. *cálculo por integración de volúmenes (por láminas horizontales).*

CEOV A

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

♦ Estudiemos el apartado 6.6 del libro Cálculo. Volumen I. (OpenStax —Rice University—) (https://campusvirtual.unex.es/zonauex/avuex/mod/url/view.php?id=1676189), (acceso directo: https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-6-momentos-y-centros-de-masa).
► Realicemos el proyecto de estudiante «El mirador de cristal Skywalk del Gran Cañón» (págs. 652 a 654).
Observaciones: ▪ Somos libres de añadir lo que consideremos oportuno. ▪ El documento que entreguemos debe estar por completo escrito a mano, con letra clara, siendo su entrega en mano. ▪ Puntuación máxima: 1,5 puntos sobre la calificación final de la asignatura. ▪ Fecha de propuesta: miércoles 6 de noviembre de 2024. ▪ Fecha límite de entrega: jueves 19 de diciembre a las 11:30, en el aula A1.

Esquema de resolución.—

Usamos el sistema común de unidades de Estados Unidos de América, con las siguientes unidades: de longitud, el pie (ft); de masa, el slug; de fuerza, la libra (lb). Aunque como valor de la aceleración de la gravedad suele tomarse en este sistema $32{,}2\,\text{ft/s}^2$, siguiendo el enunciado tomamos por su valor $32\,\text{ft/s}^2$. Redondearemos a tres decimales.

1.— Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de las subregiones R_1, R_2 y R_3, respectivamente. El área de una corona circular de radio menor r y radio mayor R es $\pi(R^2 - r^2)$, es por esto que

$$A_1 = \frac{\pi}{2}\left(35^2 - 25^2\right) = \frac{\pi}{2}600 = 300\pi \approx 942{,}478\,\text{ft}^2.$$

El área de un rectángulo de base b y altura h es bh, es por esto que como R_2 está formada por dos rectángulos de iguales dimensiones, $b = 10\,\text{ft}$ y $h = 35\,\text{ft}$, y R_3 está formada por dos rectángulos de iguales dimensiones, $b = 10\,\text{ft}$ y $h = 48\,\text{ft}$, entonces

$$A_2 = 2 \cdot 10 \cdot 35 = 700\,\text{ft}^2;$$
$$A_3 = 2 \cdot 10 \cdot 48 = 960\,\text{ft}^2.$$

2.— El peso de un objeto se define como el producto de la masa por la aceleración de la gravedad; por esto, la masa de la plataforma es $m_P = \dfrac{1\,200\,000\,\text{lb}}{32\,\text{ft/s}^2} = 37\,500$ slugs.

La densidad superficial de un material se define como la cantidad de masa por unidad de área; por esto, la densidad superficial de la lámina es $\rho = \dfrac{37\,500}{300\pi + 700 + 960} \approx 14{,}409\,\text{slugs/ft}^2$.

Por lo anterior, las masas m_1, m_2 y m_3 respectivas de las subregiones R_1, R_2 y R_3 son:

$$m_1 = \rho \cdot A_1 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\text{slugs/ft}^2 \cdot 300\pi\,\text{ft}^2 \approx 13\,580{,}488 \text{ slugs};$$
$$m_2 = \rho \cdot A_2 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\text{slugs/ft}^2 \cdot 700\,\text{ft}^2 \approx 10\,086{,}541 \text{ slugs};$$
$$m_3 = \rho \cdot A_3 = \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\,\text{slugs/ft}^2 \cdot 960\,\text{ft}^2 \approx 13\,832{,}971 \text{ slugs}.$$

(Como es lógico, $13\,580{,}488 + 10\,086{,}541 + 13\,832{,}971 = 37\,500$).

3.— Como las tres subregiones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, las abscisas de sus centros de masas son $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = 0$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Por otra parte, como las regiones R_2 y R_3 son simétricas con respecto a sus ejes horizontales medios, las ordenadas de sus centros de masas son $\overline{y}_2 = \dfrac{-35}{2} = -17{,}5$ e $\overline{y}_3 = -35 - \dfrac{48}{2} = -59$.

Sólo falta calcular la ordenada del centro de masas de R_1. Esta región está acotada superiormente por $f(x) = \sqrt{35^2 - x^2}$ e inferiormente por $g(x) = \sqrt{25^2 - x^2}$ si $-25 \leq x \leq 25$ y $g(x) = 0$ si $-35 \leq x \leq -25$ o si $25 \leq x \leq 35$. Su momento con respecto del eje de abscisas es:

$$\begin{aligned}
M_1^x &= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}\Big((f(x))^2 - (g(x))^2\Big)\,dx = \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{-25}\Big((f(x))^2 - 0^2\Big)\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}\Big((f(x))^2 - (g(x))^2\Big)\,dx \\
&\quad + \frac{\rho}{2}\int_{25}^{35}\Big((f(x))^2 - 0^2\Big)\,dx \\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{-25}(f(x))^2\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(f(x))^2\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(g(x))^2\,dx + \frac{\rho}{2}\int_{25}^{35}(f(x))^2\,dx \\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}(f(x))^2\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(g(x))^2\,dx \\
&= \frac{\rho}{2}\int_{-35}^{35}(35^2 - x^2)\,dx - \frac{\rho}{2}\int_{-25}^{25}(25^2 - x^2)\,dx \\
&= \frac{\rho}{2}\left(35^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-35}^{35} - \frac{\rho}{2}\left(25^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-25}^{25} \\
&= \frac{\rho}{2}\left(35^3 - \frac{1}{3}35^3 + 35^3 - \frac{1}{3}35^3\right) - \frac{\rho}{2}\left(25^3 - \frac{1}{3}25^3 + 25^3 - \frac{1}{3}25^3\right) \\
&= \frac{54\,500}{3}\rho,
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_1 = \dfrac{M_1^x}{m_1} = \dfrac{54\,500\rho/3}{300\pi\rho} \approx 19{,}275$. En definitiva, $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) \approx (0; 19{,}275)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (0; -17{,}5)$ y $(\overline{x}_3, \overline{y}_3) = (0; -59)$.

4.— Sea $(\overline{x}_P, \overline{y}_P)$ el centro de masas de la plataforma. Como ésta es simétrica con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_P = 0$. Sólo falta calcular la ordenada $\overline{y}_P$ del centro de masas de la plataforma. Hallémosla. El momento con respecto al eje de abscisas es

$$\begin{aligned}
M_P^x &= \sum_{i=1}^{3} m_i\overline{y}_i \\
&= \rho\cdot 300\pi\cdot\frac{54\,500\rho/3}{300\pi\rho} + \rho\cdot 700\cdot(-17{,}5) + \rho\cdot 960\cdot(-59) \\
&= \rho\left(\frac{54\,500}{3} + 700\cdot(-17{,}5) + 960\cdot(-59)\right) \\
&= \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960}\cdot\left(\frac{54\,500}{3} + 700\cdot(-17{,}5) + 960\cdot(-59)\right) \\
&\approx -730\,890{,}001,
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_P = \dfrac{M_P^x}{m_P} = \dfrac{M_P^x}{37\,500} \approx -19{,}490$. En definitiva, $(\overline{x}_P, \overline{y}_P) \approx (0; -19{,}490)$.

El centro de masas está en el aire, a una distancia aproximada de 15,51 pies del muro del cañón.

5.— La masa del centro de visitantes es $m_V = \dfrac{2\,200\,000\,\text{lb}}{32\,\text{ft/s}^2} = 68\,750\,\text{slugs}$. Su centro de masas

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

es el de R_3, esto es, $(\overline{x}_V, \overline{y}_V) = (0; -59)$.

¿Cuál es el centro de masas del sistema $(\overline{x}_S, \overline{y}_S)$? Como el sistema es simétrico con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_S = 0$. Sólo falta calcular la ordenada $\overline{y}_S$ del centro de masas del sistema. Hallémosla. La masa del sistema es $m_S = m_P + m_V = 37\,500\,\text{slugs} + 68\,750\,\text{slugs} = 106\,250\,\text{slugs}$. El momento con respecto al eje de abscisas es

$$\begin{aligned} M_S^x &= m_P\overline{y}_P + m_V\overline{y}_V \\ &= m_P \cdot \frac{M_P^x}{m_P} + 68\,750 \cdot (-59) \\ &= M_P^x + 68\,750 \cdot (-59) \\ &= \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960} \cdot \left(\frac{54\,500}{3} + 700 \cdot (-17{,}5) + 960 \cdot (-59)\right) + 68\,750 \cdot (-59) \\ &\approx -4\,787\,140{,}001, \end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_S = \dfrac{M_S^x}{m_S} = \dfrac{M_S^x}{106\,250} \approx -45{,}055$. En definitiva, $(\overline{x}_S, \overline{y}_S) \approx (0; -45{,}055)$.

El centro de masas está en el centro de visitantes, en tierra, a una distancia aproximada de 10,055 pies del muro del cañón.

6.— La masa de las 800 personas es $m_{800} = \dfrac{800 \cdot 200\,\text{lb}}{32\,\text{ft/s}^2} = 5000\,\text{slugs}$. Como hemos representado a estas personas por una masa puntual situada en el borde más alejado de la plataforma, a 70 pies del muro del cañón, en el eje de ordenadas, la abscisa de su centro de masas, por simetría respecto al eje de ordenadas, es $\overline{x}_{800} = 0$ y la ordenada de su centro de masas es $\overline{y}_{800} = \dfrac{70}{2} = 35$, esto es, su centro de masas es $(\overline{x}_{800}, \overline{y}_{800}) = (0; 35)$.

¿Cuál es el centro de masas del sistema con las 800 personas $(\overline{x}_\boxplus, \overline{y}_\boxplus)$? Como el sistema con las 800 personas es simétrico con respecto al eje de ordenadas, $\overline{x}_\boxplus = 0$. Hallemos $\overline{y}_\boxplus$. La masa del sistema con las 800 personas es $m_\boxplus = m_S + m_{800} = 106\,250\,\text{slugs} + 5000\,\text{slugs} = 111\,250\,\text{slugs}$. El momento con respecto al eje de abscisas es

$$\begin{aligned} M_\boxplus^x &= m_S\overline{y}_S + m_{800}\overline{y}_{800} \\ &= m_S \cdot \frac{M_S^x}{m_S} + 5000 \cdot 35 \\ &= M_S^x + 5000 \cdot 35 \\ &= \frac{37\,500}{300\pi + 700 + 960} \cdot \left(\frac{54\,500}{3} + 700 \cdot (-17{,}5) + 960 \cdot (-59)\right) + 68\,750 \cdot (-59) + 5000 \cdot 35 \\ &= -4\,612\,140{,}001, \end{aligned}$$

por lo que $\overline{y}_\boxplus = \dfrac{M_\boxplus^x}{m_\boxplus} = \dfrac{M_\boxplus^x}{111\,250} \approx -41{,}457$. En definitiva, $(\overline{x}_\boxplus, \overline{y}_\boxplus) \approx (0; -41{,}457)$.

Aún suponiendo, como hemos hecho, que las 800 personas están todas juntas en el extremo del balcón en voladizo, el centro de masas está en el centro de visitantes, en tierra, a una distancia aproximada de 6,457 pies del muro del cañón.

Para saber más

STRANG, Gilbert, y HERMAN, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 1*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-51-0. https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-1

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

STRANG, Gilbert, y HERMAN, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 2*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-52-7. https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-2

STRANG, Gilbert, y HERMAN, Edwin "Jed", *Cálculo. Volumen 3*, Rice University, ISBN-13: 978-1-951693-53-4. https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-3

Es muy recomendable el estudio de estos textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral de una y varias variables.

CEOV B

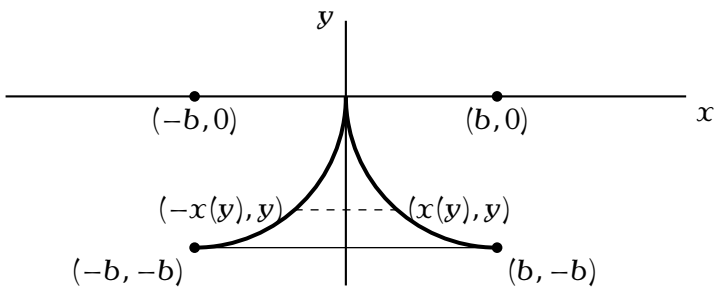
♦ Estudiemos el apartado 6.2.1 «Determinar el volumen de un sólido integrando una sección transversal (método de las rebanadas)» del libro Cálculo. Volumen I (OpenStax — Rice University—) (https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-2-determinar-los-volumenes-mediante-el-corte), sobre cómo calcular el volumen de un sólido (no necesariamente de revolución) con secciones paralelas de área conocida (láminas/rebanadas) (o bien $V = \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx$ [por planos verticales, esto es, perpendiculares a OX], o bien, $V = \int_{y_0}^{y_1} A(y)dy$ [por planos horizontales, esto es, perpendiculares a OY]).

► Calculemos el volumen de la cúpula de una pagoda de planta cuadrada y cuyas cuatro limatesas son cuadrantes de circunferencias del mismo radio b.

Observaciones: ▪ Somos libres de añadir lo que consideremos oportuno. ▪ El documento que entreguemos debe estar por completo escrito a mano, con letra clara, siendo su entrega en mano. ▪ Puntuación máxima: 0,75 puntos sobre la calificación final de la asignatura. ▪ La puntuación obtenida se sumará a la conseguida en la primera tarea optativa. ▪ Las puntuaciones logradas en ambas tareas se conservan para las convocatorias extraordinarias del mismo curso académico. ▪ Fecha de propuesta: miércoles 30 de noviembre de 2024. ▪ Fecha límite de entrega de ambas tareas: jueves 19 de diciembre a las 11:30, en el aula A1 (si hay examen parcial ese día, junto a la entrega de éste o justo a su finalización).

Esquema de resolución.—

Un corte de la cúpula por un plano paralelo a la planta (una sección horizontal de la cúpula) es un cuadrado cuya área, digamos, $A(y)$, depende de la altura y; consideremos un plano, perpendicular a la planta de la cúpula, que contenga dos limatesas opuestas, y en dicho plano, un sistema de referencia consistente en unos ejes cartesianos cuyo eje de ordenadas pase por el punto que las une y cuyo eje de abscisas pase por los centros de las circunferencias de las que dichas limatesas opuestas son cuadrantes; en dicho plano y respecto de dicho sistema de referencia, tales centros tienen por coordenadas $(-b,0)$ y $(b,0)$, mientras que los puntos de contacto entre tales limatesas y la planta tienen de coordenadas $(-b,-b)$ y $(b,-b)$;



sean $(-x(y),y)$ y $(x(y),y)$ los puntos de contacto de la sección horizontal de la cúpula, de área $A(y)$, a la altura y; como estos puntos de contacto son dos vértices opuestos de la sección cuadrada, la diagonal de dicho cuadrado es $|(-x(y))-x(y)| = 2x(y)$; observemos que $2x(y) \leq |(-b)-b| = 2b$, o sea, $x(y) \leq b$; la ecuación de la circunferencia de centro $(b,0)$ y radio b es $(x-b)^2+(y-0)^2 = b^2$, esto es, $x^2 - 2bx + y^2 = 0$, con soluciones $x(y) = b \pm \sqrt{b^2-y^2}$, que como $x(y) \leq b$, la única solución válida para una altura positiva (hecho equivalente en nuestra representación a que sea

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

$|y| < |-b|$) es $x(y) = b - \sqrt{b^2 - y^2}$, por lo que la diagonal es $2\left(b - \sqrt{b^2 - y^2}\right)$; por el teorema de Pitágoras, el área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal, de donde el área de la sección horizontal a la altura y es $A(y) = 2\left(b - \sqrt{b^2 - y^2}\right)^2$; por lo tanto, el volumen de la cúpula es $\int_{-b}^{0} 2\left(b - \sqrt{b^2 - y^2}\right)^2 dy = 2\int_{-b}^{0} \left(2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - y^2} - y^2\right) dy = 4\int_{-b}^{0} b^2 dy - 4\int_{-b}^{0} b\sqrt{b^2 - y^2} dy - 2\int_{-b}^{0} y^2 dy = 4b^3 - 4\int_{-b}^{0} b\sqrt{b^2 - y^2} dy - \frac{2}{3}b^3 \boxed{=}$

$$\int_{-b}^{0} b\sqrt{b^2 - y^2} dy = b\int_{-b}^{0} \sqrt{b^2 - y^2} dy \overset{\substack{y = b\,\mathrm{sen}\, t \\ dy = b\cos t\, dt \\ = \\ t = \arcsin(y/b) \\ -\pi/2 = \arcsin(-b/b) \\ 0 = \arcsin(0/b)}}{=} b\int_{-\pi/2}^{0} b^2\cos^2 t dt =$$

$$b^3\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2 t dt \overset{\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1}{=}$$

$$b^3\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{b^3}{2}\left(\int_{-\pi/2}^{0} 1\, dt + \int_{-\pi/2}^{0} \cos(2t)\, dt\right) = \frac{b^3}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}b^3$$

$$\boxed{=} 4b^3 - 4\frac{\pi}{4}b^3 - \frac{2}{3}b^3 = \left(\frac{10}{3} - \pi\right)b^3.$$

Solución.— El volumen de la cúpula de la pagoda es de $\left(\frac{10}{3} - \pi\right)b^3$ unidades de volumen.

Para saber más

Fuertes García, Jesús y Martínez Hernando, Jesús, *Problemas de Cálculo Infinitesimal*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1997, ISBN: 84-481-1119-2.

Nota.— La cuestión aquí estudiada es el ejercicio 11.48 (pp. 266-267) de dicho libro. Éste pertenece a la serie Schaum, siendo muy recomendable su estudio para el aprendizaje de la práctica del cálculo diferencial e integral de una variable.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Capítulo 2

Modelos en varias variables: funciones $\vec{f} : (\mathbb{R}^n, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_2)$

Como parte práctica de cada una de las secciones siguientes, debiésemos estudiar las correspondientes:

- cuestiones Cubit que se listan en ellas, sin olvidarnos de los ejemplos;
- cuestiones extra relacionadas localizadas en el cuaderno de bitácora[1];
- cuestiones, ejercicios y problemas de las obras recomendadas en dicho cuaderno de bitácora y en la bibliografía[2].

Como parte teórica, dichas obras son esenciales. Se recomienda encarecidamente su estudio.

2.0. Preliminares algebraicos, métricos y topológicos

Sea $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial con soporte el cuerpo de escalares de los números reales, $\mathbb{R}$; $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, donde los $\vec{e}_i$ son los vectores de la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$, esto es, $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (la única componente 1 es la de lugar i). Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la base canónica es $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$, y en $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Definición 2.1 (Norma en un espacio vectorial real).— Siendo $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial real, una *norma* es una aplicación $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

a. $\|\vec{x}\| = 0$ si, y sólo si, $\vec{x} = 0$;
b. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$;
c. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;

Definición 2.2 (Espacio normado).— De E con la norma se dice que es un *espacio normado*.

Teorema 105.— Si el espacio vectorial tiene un producto escalar, pudiésemos definir la norma a partir de él:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

[1] En la impartición en los años académicos 2024–2025, 2025–2026 y 2026–2027 de la asignatura Cálculo para la Edificación en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura (UEX), se ha llevado un cuaderno de bitácora en el aula virtual de la asignatura en el campus virtual de la UEX.

[2] *Vid. infra* pág. 227 de esta edición.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 52.

Ejemplos de normas son:

- norma p: $\|\vec{x}\|_p=\sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p}$;
- norma ∞: $\|\vec{x}\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$.

Teorema 106 (*Todo espacio normado es métrico*).— Así es, con la distancia inducida por la norma, $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$.

Ejemplo 53.

A modo de ejemplo, una bola abierta: $B(\vec{a},r)=\{\vec{x}\in E:\|\vec{x}-\vec{a}\|<r\}$.

Definición 2.3 (Norma euclidea en $\mathbb{R}^n$).— Es la norma 2, esto es, $\|\vec{x}\|_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$.

Definición 2.4 (Distancia euclidea en $\mathbb{R}^n$).— Es la inducida por la norma 2, esto es, $d_2(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|_2=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}$.

Teorema 107 (*de Bolzano-Weierstrass*).— Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Ejemplo 54.

En $(\mathbb{R}^3,d_2)$, hallemos el interior y la frontera de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2,\ 0\leq z\leq 3\}$.

[EPS 18.12.2025:II.0.B], [EFO 9.1.2026:II.0.B][3], [EFE 17.6.2026:II.0.B], *cfr.* problema resuelto 1.8.b (p. 17) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Sea A dicho conjunto, esto es, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2,\ 0\leq z\leq 3\}$; por una parte, A es un cilindro con sus bases situadas en los planos $z=0$ y $z=3$, altura 3 y radio de las bases $\sqrt{2}$, concretamente, la base en el plano $z=0$ es $\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2\}$, la base en el plano $z=3$ es $\{(x,y,3)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2\}$ y el manto del cilindro (esto es, su superficie lateral) es $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=2,\ 0<z<3\}$; por otra, en $(\mathbb{R}^3,d_2)$, las bolas abiertas son esferas rellenas (sin la superficie).

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C}\subseteq C$, por lo que la cuestión es qué (x,y) del cilindro A son de $\mathring{A}$. Por definición de interior, $(x,y)\in\mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r\in\mathbb{R}^+)(B((x,y),r)\subseteq A)$; si (x,y) pertenece a las bases o al manto, entonces $\forall r\in\mathbb{R}^+$ hay puntos de $A^\complement$ en la bola, particularmente todos los puntos de la semibola orientada positivemente por el vector normal en (x,y) a la base o al manto, según corresponda. Luego, $\mathring{A}$ es precisamente el cilindro A menos sus bases y manto, esto es,

$$\mathring{A}=A\setminus(\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2\}\cup\{(x,y,3)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 2\}$$

[3] Del conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 1,\ z^2\leq 1\}$, hallemos razonadamente su interior y su frontera.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ 0 < z < 3\})$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2,\ 0 < z < 3\}.$$

Frontera.— Por definición de frontera, $(x,y) \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B((x,y),r) \cap A \neq \emptyset \wedge B((x,y),r) \cap A^{\complement} \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior, todas las bolas de centro un punto (x,y) de las bases o manto del cilindro A tienen intersección con $A^{\complement}$; por otra parte, los centros (x,y) son de A, por lo que dichas bolas también tienen intersección con A; luego todo punto (x,y) de las bases o manto del cilindro A está en δA. Por otra parte, para todo punto $(x,y) \in A^{\complement}$ (esto es, no perteneciente al cilindro A), siempre podremos encontrar una bola $B((x,y),r) \subset A^{\complement}$ (y, por tanto, sin intersección con A) (basta que r sea menor que la distancia de (x,y) al cilindro A), por lo que ningún punto de $A^{\complement}$ está en δA. En consecuencia, δA es precisamente la unión de las dos bases y el manto del cilindro A, esto es,

$$\delta A = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2\} \cup \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2,\ 0 < z < 3\},$$

o, en otras palabras,

$$\delta A = A \setminus \mathring{A}.$$

Solución.— $\mathring{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2,\ 0 < z < 3\}$ y $\delta A = A \setminus \mathring{A}$. ■

2.1. Campo escalar y campo vectorial. Dominio e imagen

Definición 2.5 (Campo escalar).— Es una función real de variable vectorial, esto es, una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 55.

Del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z) = \dfrac{3z}{y^2 - x^2}$, hallemos su dominio y su imagen.

[EPS 18.12.2025:II.Op.A], [EFE 17.6.2026:II.Op.A], *cfr.* problema resuelto 1.13.b (p. 20) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

I. $\mathrm{Dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - x^2 \neq 0\}$ [pues el denominador debe ser no nulo] $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \neq x^2\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq \pm x\}$;

II. $\mathrm{Im} f = \{t \in \mathbb{R} : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $t = 3z/(y^2 - x^2)\} = \mathbb{R}$ [ya que z es un número real cualquiera —z es libre en el dominio de f— (siendo a su vez $y^2 - x^2 \neq 0$ para que el cociente sea un número real), por lo que t toma todos los valores reales].

Solución.— $\mathrm{Dom} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq \pm x\}$ e $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 56.

Del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=xy\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, hallemos su dominio y su imagen.

[EFO 9.1.2026:II.Op.A], [EFE 17.6.2026:II.Op.B], *cfr.* ejemplo 1.14 (p. 21) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

I. $\operatorname{Dom} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\neq(0,0)\}$, esto es, $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ [pues, si bien $\operatorname{Dom}\operatorname{sen} x=\mathbb{R}$, el denominador $\sqrt{x^2+y^2}$ no debe ser cero];
II. $\operatorname{Im} f=\{t\in\mathbb{R}:\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $t=xy\operatorname{sen}(1/\sqrt{x^2+y^2})\}=\mathbb{R}$ [porque x e y son números reales cualquiera y al estar la función $\operatorname{sen} x$ acotada entre -1 y 1, t toma todos los valores reales].

Solución.— $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$. ■

Definición 2.6 (Conjunto de nivel k de un campo escalar).— Siendo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar, un *conjunto de nivel* k de f es

$$N_k=\{\vec{x}\in A:f(\vec{x})=k\},$$

esto es, el conjunto de los puntos del dominio de f en los que f toma el mismo valor k. Se denomina *curva de nivel* k de f si $n=2$ y *superficie de nivel* k de f si $n=3$.

Ejemplo 57.

Las isolíneas[4].

Definición 2.7 (Campo vectorial).— Es una función vectorial de variable vectorial, esto es, una función $\vec{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Definición 2.8 (Campo escalar componente de un campo vectorial).— Un campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ tiene m campos escalares componentes $f_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, precisamente, aquellos tales que $\vec{f}(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}),\ldots,f_m(\vec{x}))$.

Definición 2.9 (Dominio de un campo vectorial).— El dominio de un campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que $\vec{f}$ pudiese definirse.

[4] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Isolínea.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Ejemplo 58.

Del campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{1+x}{y},\sqrt{z}\right)$, hallemos razonadamente su dominio y su imagen.

[EFO 9.1.2026:II.0.A], *cfr.* ejemplo 1.8 (p. 6) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Sean $f_1,f_2:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ los campos escalares componentes de $\vec{f}$, $f_1(x,y,z)=\frac{1+x}{y}$ y $f_2(x,y,z)=\sqrt{z}$; entonces:

I. como $\operatorname{Dom} f_1=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ [la única restricción es $y\neq 0$] y $\operatorname{Dom} f_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,\infty)$ [debido a la definición de raíz cuadrada], entonces $\operatorname{Dom}\vec{f}=\operatorname{Dom} f_1\cap\operatorname{Dom} f_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\times[0,\infty)$, esto es, $\operatorname{Dom}\vec{f}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:y\neq 0\wedge 0\leq z\}$; por otra parte,
II. como $\operatorname{Im} f_1=\mathbb{R}$ [pues siendo $y\neq 0$, $(1+x)/y$ toma todos los valores reales al tomarlos x] e $\operatorname{Im} f_2=[0,\infty)$ [ya que $\operatorname{Im}\sqrt{x}=[0,\infty)$], entonces $\operatorname{Im}\vec{f}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq y\}$.

Solución.— $\operatorname{Dom}\vec{f}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:y\neq 0\wedge 0\leq z\}$ e $\operatorname{Im}\vec{f}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq y\}$. ■

Ejemplo 59.

Del campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definido por $\vec{f}(x,y)=(x^2+y^2,\operatorname{sen}(xy),\ln(x+y))$, hallemos su dominio y su imagen.

[EPS 18.12.2025:II.0.A], [EFE 17.6.2026:II.0.A], *cfr.* problema resuelto 1.15 (p. 21) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Sean $f_1,f_2,f_3:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ los campos escalares componentes de $\vec{f}$, $f_1(x,y)=x^2+y^2$, $f_2(x,y)=\operatorname{sen} xy$ y $f_3(x,y)=\ln(x+y)$; entonces:

I. como $\operatorname{Dom} f_1=\mathbb{R}^2$ [porque $\operatorname{Dom} x^2=\mathbb{R}$], $\operatorname{Dom} f_2=\mathbb{R}^2$ [porque $\operatorname{Dom}\operatorname{sen} x=\mathbb{R}$] y $\operatorname{Dom} f_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y>0\}$ [porque $\operatorname{Dom}\ln x=\mathbb{R}^+$], entonces $\operatorname{Dom}\vec{f}=\operatorname{Dom} f_1\cap\operatorname{Dom} f_2\cap\operatorname{Dom} f_3=\operatorname{Dom} f_3$, esto es, $\operatorname{Dom}\vec{f}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2:x+y>0\}$; por otra parte,
II. como $\operatorname{Im} f_1=\{t\in\mathbb{R}:\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } t=x^2+y^2\}=\{t\in\mathbb{R}:0\leq t\}=[0,\infty)$ [pues $\operatorname{Im} x^2=[0,\infty)$], $\operatorname{Im} f_2=\{t\in\mathbb{R}:\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } t=\operatorname{sen}(xy)\}=\{t\in\mathbb{R}:-1\leq t\leq 1\}=[-1,1]$ [ya que $\operatorname{Im}\operatorname{sen} x=[-1,1]$] e $\operatorname{Im} f_3=\{t\in\mathbb{R}:\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } t=\ln(x+y)\}=\mathbb{R}$ [porque $\operatorname{Im}\ln x=\mathbb{R}$], entonces $\operatorname{Im}\vec{f}=[0,\infty)\times[-1,1]\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:0\leq x,-1\leq y\leq 1,z\in\mathbb{R}\}$.

Solución.— $\operatorname{Dom}\vec{f}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y>0\}$ e $\operatorname{Im}\vec{f}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:0\leq x,-1\leq y\leq 1,z\in\mathbb{R}\}$. ■

Definición 2.10 (Conjunto de nivel k de un campo vectorial).— Siendo $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ un campo vectorial, un *conjunto de nivel* k de $\vec{f}$ es

$$N_k=\{\vec{x}\in A:\|\vec{f}(\vec{x})\|=k\},$$

esto es, el conjunto de los puntos del dominio de $\vec{f}$ en los que $\vec{f}$ toma el mismo valor k. Se

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

denomina *curva de nivel k* de $\vec{f}$ si $n=2$ y *superficie de nivel k* de $\vec{f}$ si $n=3$.

2.2. Límite de un campo vectorial

Definición 2.11 (Límite de un campo vectorial en $\vec{a}$).— Siendo $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ con $\vec{a}\in A'$, y $\vec{l}=(l_1,l_2,\ldots,l_m)$,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{l}\text{ si, y sólo si, }\lim_{\|\vec{x}-\vec{a}\|\to 0}\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{l}\|=0,$$

esto es,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{l}\text{ si, y sólo si, }(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\vec{x}\in A)(\|\vec{x}-\vec{a}\|<\delta\to\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{l}\|<\epsilon).$$

Ejemplo 60.

Si f es un campo escalar de dos variables, $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}f(x,y)=l\text{ si, y sólo si, }(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(x,y)\in A)(\|(x,y)-(a_1,a_2)\|<\delta\to|f(x,y)-l|<\epsilon).$$

Teorema 108 (*Unicidad del límite de un campo vectorial en $\vec{a}$*).— Siendo $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ con $\vec{a}\in A'$, entonces si $\vec{f}$ tiene límite en $\vec{a}$, dicho límite es único.

Teorema 109 (*Caracterización de la existencia del límite de un campo vectorial en $\vec{a}$*).— Siendo $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ con $\vec{a}\in A'$, $\vec{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$, y $\vec{l}=(l_1,l_2,\ldots,l_m)$,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{l}\text{ si, y sólo si, }\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}f_i(\vec{x})=l_i,$$

para $i\in\{1,2,\ldots,m\}$. En otras palabras, la existencia del límite de un campo vectorial en un punto equivale a la existencia del límite de sus campos escalares componentes en dicho punto; además, el valor del límite del campo vectorial es el vector de valores de los límites de sus campos escalares componentes.

Teorema 110 (*Dos propiedades algebraicas de los límites de campos vectoriales*).— Siendo $\vec{f},\vec{g}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ con $\vec{a}\in A'$ y teniendo ambos, $\vec{f}$ y $\vec{g}$, límite en $\vec{a}$, entonces:

a. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(\vec{f}(\vec{x})+\vec{g}(\vec{x}))=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})+\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{g}(\vec{x})$;

b. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(\lambda\vec{f})=\lambda\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

Teorema 111 (*Dos propiedades algebraicas de los límites de campos escalares*).— Siendo $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ con $\vec{a}\in A'$ y teniendo ambos, f y g, límite en $\vec{a}$, entonces:

a. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(f(\vec{x})\cdot g(\vec{x}))=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}f(\vec{x})\cdot\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}g(\vec{x})$;

b. si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}g(\vec{x})\neq 0$, entonces $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=\dfrac{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}g(\vec{x})}$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

2.3. Límites reiterados

Definición 2.12 (Límite reiterado de un campo escalar en $\vec{a}$).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con $\vec{a} \in A'$, decimos que l es un límite reiterado de f en $\vec{a}$ si, y sólo si,

$$\vec{l} = \lim_{x_1 \to \sigma(a_1)} \lim_{x_2 \to \sigma(a_2)} \cdots \lim_{x_n \to \sigma(a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde σ es una permutación de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Ejemplo 61.

Para un campo escalar f de dos variables:

$$l_1 = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x,y) \right),$$
$$l_2 = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right).$$

Teorema 112 (*Número de límites reiterados de un campo escalar en $\vec{a}$*).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con $\vec{a} \in A'$, existen $n!$ límites reiterados de f en $\vec{a}$.

Teorema 113 (*Propiedades de los límites reiterados de un campo escalar en $\vec{a}$*).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con $\vec{a} \in A'$:

a. si f tiene límite $\vec{l}$ en $\vec{a}$ y existen todos los límites reiterados de f en $\vec{a}$, entonces todos éstos valen $\vec{l}$;
b. si dos de los límites reiterados de f en $\vec{a}$ existen con valor distinto, entonces f no tiene límite en $\vec{a}$;
c. que todos los límites reiterados de f en $\vec{a}$ existan con el mismo valor, no implica que f tenga límite en $\vec{a}$;
d. que alguno de los límites reiterados de f en $\vec{a}$ no exista, no implica que f no tenga límite en $\vec{a}$.

Ejemplo 62.

Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{xy - 2x + y}{x + y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos sus límites reiterados en $(0,0)$;
b. ¿existe su límite en (0,0)?

[EFO 9.1.2026:II.1.A], *cfr.* ejemplo 1.17 (p. 11) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. $$l_1 = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy - 2x + y}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{0 \cdot y - 2 \cdot 0 + y}{0 + y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} \overset{y \neq 0}{=} \lim_{y \to 0} 1 = 1;$$
$$l_2 = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy - 2x + y}{x + y} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0 - 2x + 0}{x + 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to 0} (-2) = -2;$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

b. como los límites reiterados de f en $(0,0)$ existen y no coinciden, entonces, por la propiedad II.ª de los límites reiterados, no existe el límite de f en $(0,0)$. ■

2.3.0. Ejercicios resueltos

Cubit 89.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

[EFO 21.1.2025:II.Op.A], *cfr.* ejemplo 1.10 (p. 8) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. $l_1=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0^2-2y^2}{2\cdot0^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-2y^2}{y^2}\overset{y\neq0}{=}\lim\limits_{y\to0}(-2)=-2;$

$l_2=\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2\cdot0^2}{2x^2+0^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}\overset{x\neq0}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2};$

b. como los límites reiterados de f en $(0,0)$ existen y no coinciden, no existe el límite de f en $(0,0)$. ■

2.4. Límites direccionales

Definición 2.13 (Límite direccional de un campo vectorial en $\vec{a}$).— Siendo $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ un campo vectorial con $\vec{a}\in A'$, decimos que $\vec{f}$ tiene límite (direccional) $\vec{l}$ en $\vec{a}$ según una trayectoria que pasa por $\vec{a}$ si, y sólo si, $\vec{l}$ es el límite de la restricción de $\vec{f}$ a dicha trayectoria.

Teorema 114 (*Caracterización del límite de un campo vectorial en $\vec{a}$*).— Se satisface:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{l}\text{ si, y sólo si, todos los límites direccionales de }\vec{f}\text{ son }\vec{l}.$$

Teorema 115 (*Cálculo del límite de un campo escalar o vectorial en $\vec{a}$*).— Resumen de algunas indicaciones:

a. sustituyamos las variables por sus valores y si el resultado es un número real, ése es el límite;
b. si dos límites reiterados existen con valor distinto, entonces no existe el límite;
c. si dos límites direccionales existen con valor distinto, entonces no existe el límite;
d. utilicemos la sustitución de infinitésimos equivalentes en varias variables;
e. consideremos reducir a un cálculo en una variable, por ejemplo, cambiando a coordenadas polares.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Ejemplo 63.

Demostremos que no existe el límite en $(0,0)$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$. (*Sugerencia:* estudiemos diferentes límites direccionales).

[EPS 18.12.2025:II.1.B], *cfr.* ejercicio 4.10 (p. 105) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.— Siguiendo la sugerencia, estudiemos los límites direccionales según las trayectorias de cualquier recta que pase por $(0,0)$, $y=kx$, con $k\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x}{x+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+(kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(1+k^2x)}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+k^2x}=\frac{1}{1+0}=1;$$

pero esto no implica que el límite de f en $(0,0)$ sea 1; investiguemos el límite direccional según la trayectoria de la parábola $x=y^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\frac{x}{x+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y^2+y^2}\overset{y\neq0}{=}\lim_{y\to0}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe pues su valor depende del camino por el que nos acerquemos a $(0,0)$. ■

Observación 39.— [Otra vía]

Un camino alternativo, entre otros, es estudiar los límites reiterados en $(0,0)$:

$$l_1=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{x+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0}{0+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}\overset{y\neq0}{=}\lim_{y\to0}0=0,$$
$$l_2=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x}{x+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}1=1;$$

éstos son distintos, por lo que, por la propiedad II.ª de los límites reiterados, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

Ejemplo 64.

Demostremos que no existe el límite en $(0,0)$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. (*Sugerencia:* estudiemos diferentes límites direccionales).

[EFO 9.1.2026:II.1.B], *cfr.* ejemplo (p. 89) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.— Siguiendo la sugerencia, estudiemos los límites direccionales

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

según las trayectorias de cualquier recta que pase por $(0,0)$, $y=kx$, con $k\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0}\frac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4}=\lim_{x\to0}\frac{xk^2x^2}{x^2(1+k^4x^2)}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}\frac{xk^2}{1+k^4x^2}=\frac{0}{1+0}=0;$$

pero esto no implica que el límite de f en $(0,0)$ sea 0; investiguemos el límite direccional según la trayectoria de la parábola $x=y^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{y^4}{y^4+y^4}\overset{y\neq0}{=}\lim_{y\to0}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe pues su valor depende del camino por el que nos acerquemos a $(0,0)$. ■

Observación 40.— [Otra vía]

Para este campo, estudiar los límites reiterados en $(0,0)$ no nos permite concluir nada sobre la existencia del límite en $(0,0)$, pues aunque ambos existen y tienen el mismo valor, esto no implica que exista el límite (propiedad III.ª de los límites reiterados); en efecto:

$$l_1=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0\cdot y^2}{0^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^4}=\lim_{y\to0}0=0,$$
$$l_2=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot0^2}{x^2+0^4}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to0}0=0.$$

Observación 41.— [Otra vía]

Un camino alternativo, entre otros, es mediante su transformación a coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ (x^2+y^2=r^2)}}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\cdot r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^4\operatorname{sen}^4\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^4\theta)}$$
$$\overset{r\neq0}{=}\lim_{r\to0}\frac{r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^4\theta},$$

cuyo valor depende de θ:

- si θ es tal que $\cos\theta\neq0$, entonces:

$$\lim_{r\to0}\frac{r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^4\theta}=\frac{0}{\cos^2\theta}=0$$

(esta situación corresponde precisamente al haz de rectas $y=kx$, pues si $\cos\theta\neq0$, entonces $\dfrac{y}{x}=\dfrac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$, esto es, $y=(\tan\theta)x$);
- para el caso en que no podamos asegurar que $\cos\theta\neq0$ tomemos como trayectoria, por ejemplo —como hicimos en el esquema de resolución—, la parábola $x=y^2$, que en polares es $r\cos\theta=r^2\operatorname{sen}^2\theta$, esto es, $\cos\theta=r\operatorname{sen}^2\theta$, entonces:

$$\lim_{r\to0}\frac{r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^4\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r\cdot(r\operatorname{sen}^2\theta)\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{(r\operatorname{sen}^2\theta)^2+r^2\operatorname{sen}^4\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\operatorname{sen}^4\theta}{2r^2\operatorname{sen}^4\theta}\overset{\substack{r\neq0\\ \operatorname{sen}^4\theta\neq0}}{=}\frac{1}{2}$$

($\operatorname{sen}^4\theta\neq0$ porque si $r\to0$, entonces $\cos\theta\to0$ [pues $\cos\theta=r\operatorname{sen}^2\theta$], de donde $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ o $\theta\to\dfrac{3\pi}{2}$,

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

esto es, $\operatorname{sen}\theta \to 1$ o $\operatorname{sen}\theta \to -1$; en cualquier caso, si $r \to 0$, $\operatorname{sen}^4\theta \to 1$).

2.4.0. Ejercicios resueltos

Cubit 90.

Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

[EPS 19.12.2024:Op.A], [EFE 22.5.2025:II.Op.A], [EFE 20.6.2025:II.Op.A], [EPS 18.12.2025:II.1.A], [EFE 17.6.2026:II.1.B], *cfr.* problema resuelto 1.11 (pp. 8–9) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. $l_1 = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^2} \overset{y\neq 0}{=} \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0;$

$l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2} \overset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0;$

b. estudiemos los límites direccionales según las rectas $y = kx$, con $k \in \mathbb{R}$:

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2k}{x^2(1+k)} \overset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k} = \dfrac{k}{1+k}$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino $y = kx$ por el que nos acercamos a $(0,0)$ (por añadidura, observemos que el límite direccional según $y = -x$ no existe en $\mathbb{R}$). ■

Observación 42.— Para (b), un camino alternativo, entre otros, es:

- pudiésemos haber transformado a coordenadas polares:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ x^2+y^2=r^2}}{=} \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta}{r^2} \overset{r\neq 0}{=} \lim\limits_{r\to 0}(\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares).

Cubit 91.

Del campo escalar $f(x,y) = x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

[EFO 21.1.2025:II.Op.B], [EFE 22.5.2025:II.Op.B], [EFE 20.6.2025:II.Op.B], *cfr.* ejemplo 1.12 (p. 9) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. $l_1 = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0;$

$l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ no existe porque $\lim\limits_{y\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ no existe;

b. que alguno de los límites reiterados en un punto no exista no implica que la función no tenga

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

límite en dicho punto, de hecho, esta función sí tiene límite en $(0,0)$; en efecto, se satisface

$$-x^2=x^2\cdot 1\leq -x^2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\leq x^2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq x^2\cdot 1=x^2,$$

esto es, $-x^2\leq x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\leq x^2$, donde, tomando límites, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(-x^2)\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2$, esto es, $0\leq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\leq 0$, de donde por el teorema del emparedado, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}=0$. ■

Observación 43.— Un camino alternativo para calcular este límite es utilizando la definición de límite de una función en un punto; en efecto, demostremos por definición que dicho límite es 0 (puesto que uno de los límites reiterados es 0): $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}=0$ si, y sólo si, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, entonces $\left|x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|<\epsilon$; ahora bien, si $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, entonces $\sqrt{x^2}<\delta$ (ya que $\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$), de donde $x^2<\delta^2$ y, por lo tanto, $\left|x^2\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq\left|x^2\right|\cdot 1=x^2<\delta^2$, por lo que basta elegir $\delta=\sqrt{\epsilon}$.

Cubit 92.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

[EPS 19.12.2024:Op. B], [EFE 17.6.2026:II.1.A], *cfr.* ejemplo 1.20 (pp. 11–12) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. $l_1=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{5\cdot0^2-7y^2}{2\cdot0^2+5y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-7y^2}{5y^2}\overset{y\neq0}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-7}{5}=\dfrac{-7}{5}$;
$l_2=\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7\cdot0^2}{2x^2+5\cdot0^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2}{2x^2}\overset{x\neq0}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$;
b. como los límites reiterados de f en $(0,0)$ existen y no coinciden, no existe el límite de f en $(0,0)$. ■

Observación 44.— Para (b), dos caminos alternativos, entre otros, son:

- pudiésemos haber estudiado los límites direccionales según las rectas $y=kx$, con $k\in\mathbb{R}$:
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7(kx)^2}{2x^2+5(kx)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(5-7k^2)}{x^2(2+5k^2)}\overset{x\neq0}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5-7k^2}{2+5k^2}=\dfrac{5-7k^2}{2+5k^2}$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino $y=kx$ por el que nos acercamos a $(0,0)$;
- pudiésemos haber transformado a coordenadas polares:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}\overset{\substack{x=r\cos\theta\\y=r\operatorname{sen}\theta}}{=}\lim\limits_{r\to0}\dfrac{5r^2\cos^2\theta-7r^2\operatorname{sen}^2\theta}{2r^2\cos^2\theta+5r^2\operatorname{sen}^2\theta}\overset{r\neq0}{=}\lim\limits_{r\to0}\dfrac{5\cos^2\theta-7\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta+5\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{5\cos^2\theta-7\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta+5\operatorname{sen}^2\theta}$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares).

2.5. Continuidad

Definición 2.14 (Campo vectorial continuo en $\vec{a}$).— Siendo $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial con $\vec{a} \in A'$, decimos que $\vec{f}$ es continuo en $\vec{a}$ si, y sólo si,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$

Ejemplo 65.

¿Es continuo en $(0,0)$ el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$?

[EFO 9.1.2026:II.Op.B], *cfr.* ejemplo 1.30 (p. 26) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Para que f sea continuo en $(0,0)$ debe existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y éste ser igual a $f(0,0)$; sin embargo, los límites reiterados en $(0,0)$,

$$l_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 0^2 - y^2}{0^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{2y^2} \overset{y\neq 0}{=} \lim_{y\to 0}\frac{-1}{2} = \frac{-1}{2},$$
$$l_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - 0^2}{x^2+2\cdot 0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} 2 = 2,$$

son distintos, por lo que, por la propiedad II.ª de los límites reiterados, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; por lo tanto, f no es continuo en $(0,0)$. ■

Observación 45.— [Otra vía]

Un camino alternativo, entre otros, es la transformación a coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ (x^2+y^2=r^2)}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{2r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + 2r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2(2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta)}$$
$$\overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0}\frac{2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta};$$

por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares), y, por lo tanto, f no es continuo en $(0,0)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 66.

¿Es continuo en $(0,0)$ el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{2x^3+y^2}{x^2+3y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$?

[EPS 18.12.2025:II.Op.B], *cfr.* problema resuelto 1.27 (p. 25) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Para que f sea continuo en $(0,0)$ debe existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ y éste ser igual a $f(0,0)$; sin embargo, los límites reiterados en $(0,0)$,

$$l_1=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{2x^3+y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{2\cdot0^3+y^2}{0^2+3y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{3y^2}\overset{y\neq0}{=}\lim_{y\to0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$
$$l_2=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{2x^3+y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+0^2}{x^2+3\cdot0^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^2}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}2x=0,$$

son distintos, por lo que, por la propiedad II.ª de los límites reiterados, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$; por lo tanto, f no es continuo en $(0,0)$. ■

Observación 46.— [Otra vía]

Un camino alternativo, entre otros, es la transformación a coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3+y^2}{x^2+3y^2}\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\substack{x=r\cos\theta\\y=r\operatorname{sen}\theta\\(x^2+y^2=r^2)}}{=}\lim_{r\to0}\frac{2r^3\cos^3\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta+3r^2\operatorname{sen}^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^2(2r\cos^3\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+3\operatorname{sen}^2\theta)}$$
$$\overset{r\neq0}{=}\lim_{r\to0}\frac{2r\cos^3\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+3\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{0+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+3\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+3\operatorname{sen}^2\theta};$$

por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares), y, por lo tanto, f no es continuo en $(0,0)$.

Teorema 116 (*Condición necesaria para la continuidad de un campo escalar en $\vec{a}$*).— Siendo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ con $\vec{a}\in A'$, y $f_{\underline{i}}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f_{\underline{i}}=f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$,

si f es continuo en $\vec{a}$, entonces $f_{\underline{i}}$ es continuo en a_i,

para $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. En otras palabras, la continuidad de un campo escalar en un punto implica la continuidad respecto de cada una de las variables (en la componente correspondiente de dicho punto) (*continuidad parcial*).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 117 (*Caracterización de la continuidad de un campo vectorial en $\vec{a}$*).— Siendo $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\vec{a} \in A'$ y $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$,

$$\vec{f} \text{ es continuo en } \vec{a} \text{ si, y sólo si, } f_i \text{ es continuo en } \vec{a},$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. En otras palabras, la continuidad de un campo vectorial en un punto equivale a la continuidad de sus campos escalares componentes en dicho punto.

Teorema 118 (*Dos propiedades algebraicas de los campos vectoriales continuos*).— Siendo $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continuos en $\vec{a}$, entonces:

a. $\vec{f} + \vec{g}$ es continuo en $\vec{a}$;
b. $\lambda\vec{f}$ es continuo en $\vec{a}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Teorema 119 (*Dos propiedades algebraicas de los campos escalares continuos*).— Siendo $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continuos en $\vec{a}$, entonces:

a. $f \cdot g$ es continuo en $\vec{a}$;
b. si $g(\vec{a}) \neq 0$, entonces f/g es continuo en $\vec{a}$.

Teorema 120 (*Composición de campos vectoriales continuos*).— Si $\vec{f}$ es continuo en $\vec{a}$ y $\vec{g}$ es continuo en $\vec{f}(\vec{a})$, entonces $\vec{g}(\vec{f})$ es continuo en $\vec{a}$.

En la práctica.— En cuestiones sobre continuidad, si sospechásemos de la no continuidad en un punto (x_0, y_0):

- pudiésemos analizar los límites reiterados del campo en (x_0, y_0), y si resultase que son iguales y distintos a $f(x_0, y_0)$, habríamos demostrado que f no es continua en (x_0, y_0) —pues si lo fuese, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, lo que obligaría a que todos los límites reiterados en (x_0, y_0) también valiesen $f(x_0, y_0)$— (si bien este proceder presenta el inconveniente de que si todos los límites reiterados existiesen pero no tuviesen todos el mismo valor, no sabríamos nada sobre la existencia del límite, por lo que tampoco sabríamos nada sobre la continuidad de f en (x_0, y_0));
- pudiésemos también calcular los límites direccionales en (x_0, y_0) con la esperanza de encontrar caminos con valores distintos del límite, pues entonces, al no existir el límite en (x_0, y_0) sabríamos que no es continua en (x_0, y_0) (con la dificultad de no saber de antemano de la existencia de caminos con los que se obtengan tales valores distintos);
- también pudiésemos analizar las continuidades parciales en (x_0, y_0), pues si resulta discontinua parcialmente en alguna variable ya sabríamos que no es continua en (x_0, y_0) (con el inconveniente de que si resultase ser continua parcialmente en todas las variables no sabríamos nada sobre la continuidad en (x_0, y_0)).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 67.

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{xye^{x^2/y^2}}{2x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$.

[EPS 18.12.2025:II.2.B], *cfr.* problema resuelto 1.29 (p. 26) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o límites direccionales o la continuidad respecto de cada variable —continuidad parcial—), procedemos atendiendo a cómo está definido el campo:

I. el campo escalar f es continuo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula [hemos quitado $(0,0)$, precisamente el punto donde se anula] [el numerador es producto de continuas; la exponencial es una composición de continuas (en el exponente hay un cociente de continuas con denominador que no se anula)];

II. para que f sea continuo en $(0,0)$ debe existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ y éste ser igual a $f(0,0)$; estudiemos los límites direccionales de f en $(0,0)$ según las rectas $y=kx$, con $k\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xye^{x^2/y^2}}{2x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(kx)e^{x^2/(kx)^2}}{2x^2+(kx)^2}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}\frac{x^2ke^{1/k^2}}{(2+k^2)x^2}\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}\frac{ke^{1/k^2}}{2+k^2}=\frac{ke^{1/k^2}}{2+k^2};$$

como vemos, el valor depende del camino $y=kx$ por el que nos acercamos a $(0,0)$, por lo tanto, el límite de f en $(0,0)$ no existe;

III. como no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, el campo escalar f no es continuo en $(0,0)$.

Solución.— El campo escalar f es continuo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y no lo es en $(0,0)$. ■

2.5.0. Ejercicios resueltos

Cubit 93.

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$.

[EPS 19.12.2024:0.º.0.B], [EFE 22.5.2025:II.0.A], [EFE 20.6.2025:II.0.A], [EFO 9.1.2026:II.2.A], *cfr.* problema resuelto 1.26 (p. 25) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o límites direccionales o la continuidad respecto de cada variable —continuidad parcial—), procedemos atendiendo a cómo está definido el campo:

I. este campo es continuo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas [pues: x^2+y^2 es continua en $(0,0)$ por ser un polinomio en dos variables; x^4-y^4 es continua en $(0,0)$ por la misma razón y $\cos x$ es continua en 0 y la composición de continuas es continua; 1 es continua y la diferencia de continuas es continua] cuyo denominador no se anula [porque $(x,y)\neq(0,0)\to x^2+y^2\neq0$];

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

II. el límite en $(0,0)$, indeterminado $\frac{0}{0}$, lo resolvemos por infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2} \overset{1-\cos(x^4-y^4)\sim_{(0,0)}\frac{1}{2}(x^4-y^4)^2}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\frac{(x^4-y^4)^2}{x^2+y^2} \overset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}{=}$$
$$\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}$$
$$\overset{x^2+y^2\neq 0}{=} \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 \overset{(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 \text{ continua en } 0}{=} (0^2+0^2)(0^2-0^2)^2 = 0;$$

III. como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, el campo también es continuo en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. ■

Observación 47.— Un camino alternativo para el cálculo del límite en $(0,0)$ es, entre otros:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\frac{(x^4-y^4)^2}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ x^2+y^2=r^2}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\frac{r^2r^6(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2}{r^2} \overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}r^6(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2 =$$
$$\frac{1}{2}(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2\lim_{r\to 0} r^6$$
$$\overset{x^6 \text{ continua en } 0}{=} \frac{1}{2}(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2\cdot 0^6 = 0.$$

Cubit 94.

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=1$ si $(x,y)=(0,0)$.

[EPS 19.12.2024:0.ª.0.A], [EPS 18.12.2025:II.2.A], [EFE 17.6.2026:II.2.A], *cfr.* problema resuelto 1.22 (pp. 23–24) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o límites direccionales o la continuidad respecto de cada variable —continuidad parcial—), procedemos atendiendo a cómo está definido el campo:

I. este campo es continuo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula [porque $(x,y)\neq(0,0)\to x^2+y^2\neq 0$];

II. el límite en $(0,0)$ es indeterminado $\frac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\frac{0}{0}$, pero de una variable:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ (x^2+y^2=r^2)}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sen} r^2\cos r^2}{r^2} \overset{\operatorname{sen} r^2\sim_0 r^2}{=} \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos r^2}{r^2}$$
$$\overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0}\cos r^2 \overset{\cos x^2 \text{ continua en } 0}{=} \cos 0^2 = 1;$$

III. como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, el campo f también es continuo en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. ■

Observación 48.— [Otras vías]

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Caminos alternativos para el cálculo del límite en $(0,0)$ son, entre otros:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\overset{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\sim_{(0,0)}x^2+y^2}{=}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\overset{x^2+y^2\neq0}{=}$
  $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y^2)\overset{\cos(x^2+y^2)\text{ continua en }(0,0)}{=}\cos(0^2+0^2)=\cos 0=1$, o bien,
- $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{\operatorname{sen} r^2\cos r^2}{r^2}\overset{\operatorname{sen}2r^2=2\operatorname{sen}r^2\cos r^2}{=}\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2r^2}{r^2}\overset{\operatorname{sen}2r^2\sim_0 2r^2}{=}\lim\limits_{r\to0}\dfrac{2r^2}{2r^2}\overset{r\neq0}{=}\lim\limits_{r\to0}1=1$, o bien,
- $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2r^2}{r^2}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{4r\cos 2r^2}{2r}\overset{r\neq0}{=}\lim\limits_{r\to0}\cos 2r^2\overset{\cos 2x^2\text{ continua en }0}{=}\cos(2\cdot0^2)=1$.

Cubit 95.

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{23x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$.

[EFO 21.1.2025:II.0.B], [EFE 22.5.2025:II.0.B], [EFE 20.6.2025:II.0.B], [EFO 9.1.2026:II.2.B], *cfr.* ejemplo b (p. 65) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Un esquema de resolución.— Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o límites direccionales o la continuidad respecto de cada variable —continuidad parcial—), procedemos atendiendo a cómo está definido el campo:

I. este campo es continuo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas [por serlo 23, x^2 e y, y serlo el producto y la suma de continuas, y x^2-y^2 es continua en $(0,0)$ por ser un polinomio de dos variables] cuyo denominador no se anula [porque $(x,y)\neq(0,0)\to x^2+y^2\neq0$];

II. el límite en $(0,0)$ es indeterminado $\dfrac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\dfrac{0}{0}$, pero de una variable:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{23x^2y}{x^2+y^2}\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ x^2+y^2=r^2}}{=}\lim_{r\to0}\frac{23r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r\cdot\operatorname{sen}\theta}{r^2}\overset{r\neq0}{=}\lim_{r\to0}23r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta=23\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\lim_{r\to0}r$$
$$\overset{\lim\limits_{r\to0}r=0}{=}23\cdot\cos^2\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot0=0;$$

III. como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\overset{\text{definición de }f}{=}f(0,0)$, el campo f también es continuo en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. ■

Cubit 96.

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^3\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$.

[EFO 21.1.2025:II.0.A], [EFE 17.6.2026:II.2.B], *cfr.* problema resuelto 1.23 (p. 24) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o límites direccionales o la continuidad respecto de cada variable —continuidad parcial—), procedemos atendiendo a cómo está definido el campo:

I. este campo es continuo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula;

II. el límite en $(0,0)$ es indeterminado $\dfrac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\dfrac{0}{0}$, pero de una variable:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cos\dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\\ x^2+y^2=r^2}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta\cos\dfrac{1}{r^2}}{r^2} \overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta\cos\frac{1}{r^2} =$$

$$\cos^3\theta \lim_{r\to 0} r\cos\frac{1}{r^2} \overset{\substack{-1\leq\cos\frac{1}{r^2}\leq 1\\ \lim_{r\to 0} r=0}}{=} 0;$$

III. como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, el campo f también es continuo en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. ■

2.6. Derivadas direccionales

Definición 2.15 (Derivada direccional de un campo escalar en $\vec{a}$ según $\vec{u}$).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con A abierto, $\vec{a} \in A$ y $\vec{u}$ un vector unitario, es el siguiente límite siempre que éste exista y sea un número real:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t},$$

que también suele notarse $f'_{\vec{u}}(\vec{a})$.

Geométricamente, es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de f con el plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{u}$, y es una medida de la *variación instantánea* de f en $\vec{a}$ en una dirección paralela a $\vec{u}$.

Dos casos de interés son:

a. la *derivada direccional según un vector no unitario* $\vec{v}$, entonces bastaría tomar $\vec{u} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$;
b. la *derivada direccional según una recta orientada*, entonces bastaría tomar como $\vec{u}$ un vector director unitario de dicha recta.

Definición 2.16 (Derivada direccional de un campo vectorial en $\vec{a}$ según $\vec{u}$).— Es el vector cuyas componentes son las derivadas direccionales correspondientes de los campos escalares componentes del campo vectorial, esto es, dado $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A abierto) con $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$,

$$\vec{D}_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{a}) = (D_{\vec{u}} f_1(\vec{a}), D_{\vec{u}} f_2(\vec{a}), \ldots, D_{\vec{u}} f_m(\vec{a})),$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 68.

Hallemos por definición de derivada direccional la derivada direccional en $(1,1)$ según el vector $(3/5,4/5)$ del campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x,y)=(x^2+y^2,x+y)$.

[EPS 18.12.2025:II.3.A], [EFE 17.6.2026:II.3.A], *cfr.* problema resuelto 2.3 (p. 55) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— Vemos primero si $(3/5,4/5)$ es un vector unitario: $\|(3/5,4/5)\|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)+\left(\frac{16}{25}\right)}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$; lo es, por lo tanto podemos proceder como sigue. Sean $f_1,f_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ los campos escalares componentes de $\vec{f}$, $f_1(x,y,z)=x^2+y^2$ y $f_2(x,y,z)=x+y$; como la derivada direccional de $\vec{f}$ en $(1,1)$ según $(3/5,4/5)$ viene dada en función de las derivadas direccionales respectivas de sus campos escalares componentes,

$$\vec{D}_{(3/5,4/5)}\vec{f}(1,1)=\left(D_{(3/5,4/5)}f_1(1,1),D_{(3/5,4/5)}f_2(1,1)\right),$$

calculemos primero estas últimas:

$$\begin{aligned}
D_{(3/5,4/5)}f_1(1,1)&=\lim_{t\to0}\frac{f_1((1,1)+t(3/5,4/5))-f_1(1,1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f_1(1+3t/5,1+4t/5)-f_1(1,1)}{t}\\
&=\lim_{t\to0}\frac{(1+3t/5)^2+(1+4t/5)^2-(1^2+1^2)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1+6t/5+9t^2/25+1+8t/5+16t^2/25-2}{t}=\\
&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(\frac{14t}{5}+t^2\right)\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}\left(\frac{14}{5}+t\right)=\frac{14}{5},\\
D_{(3/5,4/5)}f_2(1,1)&=\lim_{t\to0}\frac{f_2((1,1)+t(3/5,4/5))-f_2(1,1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f_2(1+3t/5,1+4t/5)-f_2(1,1)}{t}\\
&=\lim_{t\to0}\frac{(1+3t/5)+(1+4t/5)-(1+1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{7t}{5t}\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}.
\end{aligned}$$

Solución.— La derivada direccional de $\vec{f}$ en $(1,1)$ según el vector $(3/5,4/5)$ es $\vec{D}_{(3/5,4/5)}\vec{f}(1,1)=\left(\frac{14}{5},\frac{7}{5}\right)$. ■

2.6.0. Ejercicios resueltos

Cubit 97.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta}f(0,0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0\leq\theta<2\pi$), y
b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y=x$, $y=0$ y $x=0$?

[EFO 21.1.2025:II.1.A], [EFE 22.5.2025:II.1.A], [EFE 20.6.2025:II.1.A], [EFO 9.1.2026:II.3.A], *cfr.* ejemplo 2.1 (p. 32) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

a. Recordando la representación en coordenadas polares, sabemos que la familia de vectores $\{\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ cubre todas las direcciones posibles en el plano; estudiemos, por tanto, el valor de la derivada direccional para un vector arbitrario $\vec{u}_\theta$ de dicha familia:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}_\theta} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t\vec{u}_\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2\cdot\cos^2\theta\cdot t\cdot\operatorname{sen}\theta}{t^2\cdot\cos^2\theta + t^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{t^3\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)} \\ &\overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)} \overset{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1}{=} \lim_{t\to 0} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta; \end{aligned}$$

en otras palabras, el conjunto de todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ es $\{D_{\vec{u}_\theta} f(0,0) = \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

b. I. La recta $y = x$ forma un ángulo de valor $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ radianes con el eje de abscisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_{\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $y = x$ es $D_{\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}} f(0,0) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

II. la recta $y = 0$ forma un ángulo de valor $\theta = 0$ radianes con el eje de abscisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_0 = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1,0)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $y = 0$ es $D_{\vec{u}_0} f(0,0) = \cos^2 0\operatorname{sen} 0 = 1^2\cdot 0 = 0$;

III. la recta $x = 0$ forma un ángulo de valor $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ radianes con el eje de abscisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $x = 0$ es $D_{\vec{u}_{\frac{\pi}{2}}} f(0,0) = \cos^2\dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 0^2\cdot 1 = 0$. ■

2.7. Derivadas parciales, derivabilidad

Definición 2.17 (Derivada parcial de un campo escalar en $\vec{a}$).— Siendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con A abierto, $\vec{a} \in A$, es la derivada direccional de f en $\vec{a}$ según un vector unitario del tipo $\vec{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (el 1 está en la posición i):

$$D_{\underbrace{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}_{i}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_1,x_2,\ldots,x_n) + t(0,\ldots,0,\overbrace{1}^{i},0,\ldots,0)) - f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{t}$$

En otras palabras, una derivada parcial de un campo escalar de n variables en un punto es una derivada direccional según un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Geométricamente, la derivada parcial de f respecto según $\vec{e}_i$ en $\vec{a}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de f con el plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{e}_i$, y es una medida de la *variación instantánea* de f en $\vec{a}$ en una dirección paralela a $\vec{e}_i$ cuando a_j $(j \neq i)$ se mantiene constante.

Teorema 121.— Un campo escalar de n variables tiene n derivadas parciales en un punto (tantas como vectores tiene la base canónica de $\mathbb{R}^n$).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 69.

De este modo, siendo $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y (x_0,y_0) un punto de un abierto de $(\mathbb{R}^2,d_2)$, las derivadas parciales de f en (x_0,y_0) son:

$$D_{(1,0)}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f((x_0,y_0)+t(1,0))-f(x_0,y_0)}{t}\quad\text{y}\quad D_{(0,1)}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f((x_0,y_0)+t(0,1))-f(x_0,y_0)}{t},$$

esto es,

$$D_{(1,0)}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\quad\text{y}\quad D_{(0,1)}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t},$$

que en el estudio de la derivabilidad en el punto $\vec{0}$ son sencillas de recordar:

$$D_{(1,0)}f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\quad\text{y}\quad D_{(0,1)}f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}.$$

Alternativamente, haciendo las sustituciones $t=x-x_0$ y $t=y-y_0$, respectivamente:

$$D_{(1,0)}f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\quad\text{y}\quad D_{(0,1)}f(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Son varias las notaciones que aparecen en la literatura matemática; por ejemplo, para dos variables, quizás las más frecuentes sean:

$$D_{(1,0)}f(x_0,y_0),\ D_1f(x_0,y_0),\ f_1'(x_0,y_0),\ f_x'(x_0,y_0),\ f_x(x_0,y_0),\ \partial_xf(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),$$

$$D_{(0,1)}f(x_0,y_0),\ D_2f(x_0,y_0),\ f_2'(x_0,y_0),\ f_y'(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ \partial_yf(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),$$

que utilizaremos indistintamente.

Definición 2.18 (Campo escalar derivable en $\vec{a}$).— Siendo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar con A abierto, $\vec{a}\in A$, decimos que f es derivable en $\vec{a}$ si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales de f en $\vec{a}$.

Definición 2.19 (Campo escalar derivable en un abierto).— Decimos que el campo escalar es *derivable en un conjunto abierto* si, y sólo si, lo es en todos sus puntos.

Ejemplo 70.

Del campo escalar $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z)=x^3y^2z+xz$:

a. estudiemos por definición de derivada parcial si existen sus derivadas parciales en $(1,2,3)$;
b. ¿es f derivable en $(1,2,3)$?

[EPS 18.12.2025:II.3.B], *cfr.* problema resuelto 2.5 (p. 35) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— a. Las derivadas parciales de f en $(1,2,3)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,2,3)-f(1,2,3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{12x^3+x\cdot 3-1^3\cdot 2^2\cdot 3-1\cdot 3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{12x^3+3x-15}{x-1}\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{36x^2+3}{1} = 36+3 = 39,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = \lim_{y\to 2}\frac{f(1,y,3)-f(1,2,3)}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{3y^2+1\cdot 3-15}{y-2}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 2}\frac{6y}{1} = 12,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = \lim_{z\to 3}\frac{f(1,2,z)-f(1,2,3)}{z-3} = \lim_{z\to 3}\frac{4z+z-15}{z-3}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{z\to 3}\frac{5}{1} = 5;$$

b. una función es derivable en un punto si, y sólo si, existen sus derivadas parciales en dicho punto; como existen las derivadas parciales de f en $(1,2,3)$, f es derivable en $(1,2,3)$. ■

Observación 49.— [Otra vía]

Para calcular las derivadas parciales, también pudiésemos haber usado la definición primaria de derivada parcial como derivada direccional según un vector de la base:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = D_{(1,0,0)}f(1,2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f((1,2,3)+t(1,0,0))-f(1,2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,2,3)-f(1,2,3)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{12(t^3+3t^2+3t+1)+3(1+t)-15}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{12t^3+36t^2+36t+12+3+3t-15}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{12t^3+36t^2+39t}{t} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0}\left(12t^2+36t+39\right) = 39,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = D_{(0,1,0)}f(1,2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f((1,2,3)+t(0,1,0))-f(1,2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1,2+t,3)-f(1,2,3)}{t} = \cdots = 12,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = D_{(0,0,1)}f(1,2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f((1,2,3)+t(0,0,1))-f(1,2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1,2,3+t)-f(1,2,3)}{t} = \cdots = 5.$$

Definición 2.20 (Derivada parcial de un campo vectorial en $\vec{a}$ según $\vec{u}$).— Es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales correspondientes de los campos escalares componentes del campo vectorial, esto es, dado $\vec{f}: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A abierto) con $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$,

$$\vec{D}_i\vec{f}(\vec{a}) = (D_i f_1(\vec{a}), D_i f_2(\vec{a}), \ldots, D_i f_m(\vec{a})),$$

para $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Definición 2.21 (Campo vectorial derivable en $\vec{a}$).— Siendo $\vec{f}: A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial con A abierto, $\vec{a}\in A$, decimos que $\vec{f}$ es derivable en $\vec{a}$ si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales de $\vec{f}$ en $\vec{a}$.

Definición 2.22 (Derivada de un campo vectorial de una variable en a).— Siendo $\vec{f}: A\subseteq\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial con A abierto, $a\in A$ y $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, la derivada de $\vec{f}$ en a es

$$\vec{f}'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_m'(a)).$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Ejemplo 71.

La función derivada del campo vectorial de una variable $\vec{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x)=(x^2,x^3)$ es $\vec{f}'(x)=(2x,3x^2)$.

Definición 2.23 (Gradiente de un campo escalar en $\vec{a}$).— Siendo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar con A abierto, $\vec{a}\in A$, se denomina gradiente de f en $\vec{a}$ al vector

$$\nabla f(\vec{a})=(D_1f(\vec{a}),D_2f(\vec{a}),\ldots,D_nf(\vec{a})).$$

Definición 2.24 (Plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ definida por un campo escalar f de dos variables en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$).— Siendo $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar con A abierto, $\vec{a}=(x_0,y_0)\in A$, es el plano que pasa por $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ y contiene a las rectas tangentes de pendientes $f'_x(x_0,y_0)$ y $f'_y(x_0,y_0)$, siendo la ecuación de dicho plano tangente

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

esto es,

$$z-f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}.$$

Cabe destacar que *en más de una variable, la continuidad y la derivabilidad no están relacionadas*: existen campos escalares continuos y derivables, continuos y no derivables, no continuos y derivables, y no continuos y no derivables.

2.7.0. Ejercicios resueltos

Cubit 98.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?;

[EPS 19.12.2024:1.ª.1.B.a–c], *cfr.* ejemplo 2.3 (p. 34) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\dfrac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{f(t,0)-0}{t}=$
$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{t^2-0^2}{t^2+0^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2}{t^3}\overset{t\neq0}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\notin\mathbb{R}$ (no existe);
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{f(0,t)-0}{t}=$
$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{0^2-t^2}{0^2+t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-t^2}{t^3}\overset{t\neq0}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-1}{t}\notin\mathbb{R}$ (no existe);
en definitiva, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ no existen;

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

b. para $(x,y)\neq(0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2};$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto:
   i. f no es derivable en $\mathbb{R}^2$ por no serlo en $(0,0)$;
   ii. f sí es derivable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ porque $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde f no es derivable, ya que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tienen por dominio $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; ■

Cubit 99.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?;

[EFO 21.1.2025:II.1.B.a–c], [EFE 22.5.2025:II.1.B.a–c], [EFE 20.6.2025:II.1.B.a–c], [EFO 9.1.2026:II.3.B], *cfr.* problema resuelto 2.11 (pp. 62–64) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\frac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\frac{f(t,0)-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\frac{t^2\cdot0+t\cdot0^2}{t^2+0^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^3}\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}0=0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\frac{f(0,t)-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\frac{0^2\cdot t+0\cdot t^2}{0^2+t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^3}\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}0=0;$$
en definitiva, ambas derivadas parciales de f en $(0,0)$ valen 0;

b. para $(x,y)\neq(0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2)-2x(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2+2xy)(x^2+y^2)-2y(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto;

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

por lo tanto, f es derivable en $\mathbb{R}^2$ —y en particular lo es también en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$— pues existen las derivadas parciales para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; ■

Observación 50.— [Otra vía]

En a., para calcular las derivadas parciales, también pudiésemos haber usado las sustituciones $t=x-x_0$ para $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $t=y-y_0$ para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2\cdot0+x\cdot0^2}{x^2+0^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0^2\cdot y+0\cdot y^2}{0^2+y^2}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to0}0=0.$$

Observación 51.— En b., las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, algo simplificadas, son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2y^2+2xy^3+y^4}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3-2x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+2x^3y-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Cubit 100.

Del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

[EPS 19.12.2024:1.ª.1.A.a–c], [EFE 17.6.2026:II.3.B], *cfr.* problema resuelto 2.9 (pp. 61–62) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\frac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{f(t,0)-0}{t}=$
$\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{t^4+t^2\cdot0-0^2}{2t^4+3\cdot0^2}=\lim_{t\to0}\dfrac{t^4}{2t^5}$
$\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}\dfrac{1}{2t}\notin\mathbb{R}$ (no existe);
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{f(0,t)-0}{t}=$
$\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\dfrac{0^4+0^2\cdot t-t^2}{2\cdot0^4+3\cdot t^2}=\lim_{t\to0}\dfrac{-t^2}{3t^3}$
$\overset{t\neq0}{=}\lim_{t\to0}\dfrac{-1}{3t}\notin\mathbb{R}$ (no existe);
en definitiva, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ no existen;
b. para $(x,y)\neq(0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(4x^3+2xy)(2x^4+3y^2)-8x^3(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2} = \frac{-4x^5y+20x^3y^2+6xy^3}{(2x^4+3y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2-2y)(2x^4+3y^2)-6y(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2} = \frac{2x^6-10x^4y-3x^2y^2}{(2x^4+3y^2)^2};$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto:
   I. f no es derivable en $\mathbb{R}^2$ por no serlo en $(0,0)$;
   II. f sí es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde f no es derivable, ya que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tienen por dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; ■

2.8. Derivadas parciales sucesivas

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A abierto, $\vec{a} \in A$, $\vec{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar.

Definición 2.25 (Derivadas parciales segundas de un campo escalar f).— Las derivadas parciales de un campo escalar f pueden ser a su vez derivables; se conocen como derivadas parciales segundas o de orden dos de f.

Ejemplo 72.

Si $n = 2$ y utilizando la notación de LEIBNIZ, las derivadas parciales segundas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),$$

siendo también frecuentes en la literatura otras notaciones; por ejemplo, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ también se nota $\partial_{yx} f$, f_{xy} y $(f_x)_y$.

La situación puede repetirse para órdenes mayores y podemos hablar de derivadas de orden tres, cuatro, etc.

Definición 2.26 (Campo escalar de clase C^n en A).— El campo escalar f es:

- de clase C^1 en A precisamente si es derivable en A y sus derivadas parciales de primer orden son continuas en A;
- de clase C^n en A $(n \geq 2)$ precisamente si es n veces derivable en A, es de clase C^{n-1} en A y sus derivadas parciales de orden n son continuas en A.

Definición 2.27 (Campo vectorial de clase C^n en A).— El campo vectorial $\vec{f}$ es de clase C^n en A $(n \geq 1)$ precisamente si lo son en A todas sus funciones componentes.

Definición 2.28 (Campo de clase C^∞ en A).— Aquél que es continuo en A, existen todas sus derivadas parciales de cualquier orden y todas éstas son funciones continuas en A.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 122 (de Schwarz para las derivadas cruzadas).— Si f es tal que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ en $\vec{a}$ y además $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ es continua en $\vec{a}$, entonces también existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$ en $\vec{a}$ y se satisface

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\vec{a}).$$

Observación 52.— Un campo de clase C^2 satisface el teorema de Schwarz.

Definición 2.29 (Matriz hessiana).— La *matriz hessiana de un campo escalar* $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ con derivadas parciales de segundo orden en $\vec{a}$ es la matriz $n\times n$ definida por

$$Hf(\vec{a})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\vec{a})\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(\vec{a})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{a})\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 73.

Si $n=2$ y si $n=3$, con la notación habitual, $\vec{x}=(x,y)$ y $\vec{x}=(x,y,z)$, respectivamente, las matrices hessianas son:

$$Hf(a_1,a_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a_1,a_2)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a_1,a_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\end{pmatrix},$$

$$Hf(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(a_1,a_2,a_3)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(a_1,a_2,a_3)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(a_1,a_2,a_3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a_1,a_2,a_3)\end{pmatrix}.$$

Definición 2.30 (Hessiano).— Es el determinante de la matriz hessiana.

Definición 2.31 (Polinomio homogéneo).— Polinomio cuyos términos no nulos tienen todos el mismo grado. Por ejemplo, $x^6+x^3y^3+x^4y^2-xy^5$, pues todos tienen grado 6 ($6=3+3=4+2=1+5$).

Definición 2.32 (Forma cuadrática).— Polinomio homogéneo de grado 2.

Definición 2.33 (Forma cuadrática asociada a una matriz).— Toda matriz cuadrada $A=(a_{ij})_{n\times n}$ determina una forma cuadrática $q_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida para $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

por

$$q_A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

esto es, por

$$q_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Definición 2.34 (Forma cuadrática definida e indefinida).— Se dice que la forma cuadrática es:

- *definida positiva* precisamente si todos los menores principales[5] de A son positivos;
- *definida negativa* precisamente si son negativos todos los menores principales de A de índice impar y son positivos todos los de índice par;
- *semidefinida positiva* precisamente si todos los menores principales de A son no negativos (≥ 0);
- *semidefinida negativa* precisamente si son no positivos (≤ 0) todos los menores principales de A de índice impar y son no negativos (≥ 0) todos los de índice par, e
- *indefinida* en otros casos.

Definición 2.35 (Función hessiana).— La *función hessiana de un campo escalar* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales de segundo orden en $\vec{a}$ es la forma cuadrática $q_{Hf(\vec{a})} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ determinada por $Hf(\vec{a})$, esto es, aplicada a $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ está definida por

$$q_{Hf(\vec{a})}(\vec{h}) = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} Hf(\vec{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

es decir, por

$$q_{Hf(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) h_i h_j.$$

Ejemplo 74.

Si $n = 2$ y si $n = 3$, con la notación habitual, $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{x} = (x, y, z)$, respectivamente, son

$$qf_{Hf(a_1,a_2)}(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2) h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(a_1, a_2) h_1 h_2,$$

$$\begin{aligned} qf_{Hf(a_1,a_2,a_3)}(h_1, h_2, h_3) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2, a_3) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2, a_3) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a_1, a_2, a_3) h_3^2 + \\ &2\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(a_1, a_2, a_3) h_1 h_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z}(a_1, a_2, a_3) h_1 h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z}(a_1, a_2, a_3) h_2 h_3. \end{aligned}$$

[5] Dada una matriz A, un menor, esto es, un determinante de una submatriz de A, se dice que es un *menor principal* precisamente si el conjunto de los índices de sus filas es el mismo que el conjunto de los índices de sus columnas; por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, sus menores principales son: $|a_{11}|$, $|a_{22}|$, $|a_{33}|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y $|A|$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

2.9. Diferenciabilidad de un campo vectorial

Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$, A abierto, $\vec{a}\in A$, $\vec{f}:A\longrightarrow\mathbb{R}^m$ un campo vectorial, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, unitario.

Definición 2.36 (Campo vectorial diferenciable en un punto $\vec{a}$).— El campo vectorial $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$ precisamente si existe una aplicación lineal[6] $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\frac{\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})-L(\vec{x}-\vec{a})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}=\vec{0}.$$

Definición 2.37 (Diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{a}$).— Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$, la aplicación lineal L es única; esta aplicación lineal se conoce como diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{a}$ y se representa como $d\vec{f}(\vec{a})$.

Definición 2.38 (Campo escalar diferenciable en un punto).— El campo escalar f es diferenciable en $\vec{a}$ precisamente si existe una aplicación lineal $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\frac{f(\vec{x})-f(\vec{a})-L(\vec{x}-\vec{a})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}=\vec{0}.$$

Definición 2.39 (Diferencial de un campo escalar en un punto).— Si f es diferenciable en $\vec{a}$, la aplicación lineal L es única; esta aplicación lineal se conoce como diferencial de f en $\vec{a}$ y se representa como $df(\vec{a})$.

Definición 2.40 (Campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto A).— El campo vectorial $\vec{f}$ es diferenciable en A precisamente si lo es en todo punto $\vec{a}$ de A.

Teorema 123 (*Una condición necesaria de diferenciabilidad*).— Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$, entonces $\vec{f}$ es continua en $\vec{a}$.

Teorema 124 (*Otra condición necesaria de diferenciabilidad*).— Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$, entonces existen todas las derivadas direccionales de $\vec{f}$ en $\vec{a}$, $D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{a})$, con $\vec{u}$ un vector unitario; además, se satisface que $D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{a})=d\vec{f}(\vec{a})(\vec{u})$.

Teorema 125 (*Otra condición necesaria de diferenciabilidad*).— Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$, entonces existen todas las derivadas parciales de primer orden de $\vec{f}$ en $\vec{a}$, ya que $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}(\vec{a})=D_{\vec{e}_i}\vec{f}(\vec{a})$, con $\vec{e}_i$ el vector unitario $(0,\dots,0,\overbrace{1}^{[\ l1r]i},0,\dots,0)$ —en otras palabras, $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}(\vec{a})=d\vec{f}(\vec{a})(\vec{e}_i)$; y, en otras, $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}(\vec{a})=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{e}_i$ (donde $\cdot$ es el producto escalar[a])—.

[a] El *producto escalar* de dos vectores reales $\vec{u}(u_1,u_2,\cdots,u_n),\vec{v}(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ se define por $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$.

[6] Sean V y W espacios vectoriales, ambos sobre un mismo cuerpo K; se dice que $L:V\longrightarrow W$ es una *aplicación lineal* precisamente si $\forall\vec{u},\vec{v}\in V$, $\forall k\in K$, se satisface $L(u+v)=L(u)+L(v)$ y $L(ku)=kL(u)$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 126 (*Una condición suficiente de diferenciabilidad*).— Si $\vec{f}$ es de clase C^1 en A, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en A.

Definición 2.41 (Matriz jacobiana).— la *matriz jacobiana* de un campo vectorial $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ diferenciable en $\vec{a}$ es la matriz $m \times n$ asociada a la diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{a}$ como aplicación lineal $d\vec{f}(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es decir,

$$J\vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix},$$

que reescrita en términos del gradiente[7] queda

$$J\vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{a}) \\ \nabla f_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

Teorema 127 (*Diferencial de un campo vectorial en un punto (bis)*).— Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a} \in A$, entonces la diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{a}$, esto es, la aplicación lineal $d\vec{f}(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, aplicada a $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, está definida por

$$d\vec{f}(\vec{a})(\vec{h}) = J\vec{f}(\vec{a}) \cdot \vec{h}.$$

Teorema 128 (*Cálculo de la derivada direccional de un campo vectorial $\vec{f}$ en $\vec{a}$ según la dirección de $\vec{u}$*).— Si $\vec{f}$ es un campo vectorial, como $D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{a}) = d\vec{f}(\vec{a})(\vec{u})$, entonces

$$D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{a}) = J\vec{f}(\vec{a}) \cdot \vec{u}.$$

Teorema 129 (*Diferencial de un campo escalar en un punto (bis)*).— Si f es diferenciable en $\vec{a} \in A$, entonces la diferencial de f en $\vec{a}$, esto es, la aplicación lineal $df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, aplicada a $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, está definida por

$$df(\vec{a})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h},$$

esto es,

$$df(\vec{a})(\vec{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n.$$

[7] El *gradiente* de un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales de primer orden en $\vec{a}$, es el campo vectorial $\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido para $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ por $\nabla f(\vec{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$, conociéndose éste como *vector gradiente*.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Teorema 130 (*Cálculo de la derivada direccional de un campo escalar f en $\vec{a}$ según la dirección de $\vec{u}$*).— Si f es un campo escalar, como $D_{\vec{u}}f(\vec{a})=df(\vec{a})(\vec{u})$, entonces

$$D_{\vec{u}}f(\vec{a})=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u},$$

o lo que es igual,

$$D_{\vec{u}}f(\vec{a})=\|\nabla f(\vec{a})\|\cos\varphi,$$

con φ el ángulo que forman $\nabla f(\vec{a})$ y $\vec{u}$.

Teorema 131 (*Valores mínimo y máximo de la derivada direccional de un campo escalar f en $\vec{a}$*).—

- El valor máximo de la derivada direccional (o sinónimamente, la máxima derivada direccional) de f en $\vec{a}$ es $\|\nabla f(\vec{a})\|$ y se alcanza cuando $\vec{a}$ tiene la dirección y sentido de $\nabla f(\vec{a})$.
- El valor mínimo de la derivada direccional (o sinónimamente, la mínima derivada direccional) de f en $\vec{a}$ es $-\|\nabla f(\vec{a})\|$ y se alcanza cuando $\vec{a}$ tiene la dirección de $\nabla f(\vec{a})$ pero su sentido es el contrario.
- Toda derivada direccional de f en $\vec{a}$ satisface $-\|\nabla f(\vec{a})\|\leq D_{\vec{u}}f(\vec{a})\leq\|\nabla f(\vec{a})\|$.

Teorema 132 (*Campo escalar diferenciable en un punto (bis)*).— El campo escalar f es diferenciable en $\vec{a}$ precisamente si existe una aplicación lineal $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$$

con $\vec{h}=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, y que viene dada por

$$L(\vec{h})=df(\vec{a})(\vec{h}),$$

esto es, por

$$df(\vec{a})(\vec{h})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n,$$

por lo que el campo escalar f es diferenciable en $\vec{a}$ precisamente si

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})h_1-\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})h_2-\cdots-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})h_n}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}.$$

2.9.0. Ejercicios resueltos

Cubit 98+.
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

[EPS 19.12.2024:1.ª.1.B.d], *cfr.* ejemplo 2.3 (p. 34) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

d. veamos:

i. si un campo escalar es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas direccionales en dicho punto (en particular, las parciales); y es diferenciable en un con-

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

junto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto: como no existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$, no existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, por lo que f no es diferenciable en $(0,0)$, por lo que tampoco lo es en $\mathbb{R}^2$;

II. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

Cubit 99+.
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

[EFO 21.1.2025:II.1.B.d], [EFE 22.5.2025:II.1.B.d], [EFE 20.6.2025:II.1.B.d], *cfr.* problema resuelto 2.11 (pp. 62–64) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

d. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

Cubit 100+.
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

[EPS 19.12.2024:1.ª.1.A.d], *cfr.* ejemplo 2.3 (p. 34) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

d. veamos:

I. si un campo escalar es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas direccionales en dicho punto (en particular, las parciales); y es diferenciable en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto: como no existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$, no existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, por lo que f no es diferenciable en $(0,0)$, por lo que tampoco lo es en $\mathbb{R}^2$;

II. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

2.10. Optimización con restricciones de igualdad, por sustitución directa: extremos para campos escalares

Definición 2.42 (Mínimo absoluto (o global)).— Siendo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in A$, se dice que f alcanza/presenta/tiene un mínimo absoluto (o global) en $\vec{a}$ precisamente si para todo $\vec{x} \in A$, $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$. Este mínimo absoluto se dice que es estricto si lo que sucede es que $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Definición 2.43 (Máximo absoluto (o global)).— Siendo $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in A$, se dice que f alcanza/presenta/tiene un máximo absoluto (o global) en $\vec{a}$ precisamente si para todo $\vec{x}\in A$, $f(\vec{x})\leq f(\vec{a})$. Este máximo absoluto se dice que es estricto si lo que sucede es que $f(\vec{x})<f(\vec{a})$.

Definición 2.44 (Extremo absoluto (o global)).— Un punto donde un campo alcance un mínimo o un máximo absoluto.

Definición 2.45 (Mínimo local (o relativo)).— Siendo $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in A$ un punto no aislado de A, se dice que f alcanza/presenta/tiene un mínimo local (o relativo) en $\vec{a}$ precisamente si existe una bola abierta B centrada en $\vec{a}$ tal que para todo $\vec{x}\in B\cap A$, $f(\vec{x})\geq f(\vec{a})$. Este mínimo local se dice que es estricto si lo que sucede es que $f(\vec{x})>f(\vec{a})$.

Definición 2.46 (Máximo local (o relativo)).— Siendo $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in A$ un punto no aislado de A, se dice que f alcanza/presenta/tiene un máximo local (o relativo) en $\vec{a}$ precisamente si existe una bola abierta B centrada en $\vec{a}$ tal que para todo $\vec{x}\in B\cap A$, $f(\vec{x})\leq f(\vec{a})$. Este máximo local se dice que es estricto si lo que sucede es que $f(\vec{x})<f(\vec{a})$.

Definición 2.47 (Extremo local (o relativo)).— Un punto donde un campo alcance un mínimo o un máximo local.

Teorema 133 (*de Weierstrass*).— Si $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es compacto (esto es, cerrado y acotado) y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en A, entonces f alcanza en A el mínimo global y el máximo global.

Definición 2.48 (Punto crítico de un campo escalar).— Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in A$; se dice que $\vec{a}$ es un punto crítico para f precisamente si $\nabla f(\vec{a})$ no existe o si $\nabla f(\vec{a})=\vec{0}$.

Teorema 134 (*Condiciones necesarias de primer orden para extremo local*).— Si $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ presenta un extremo local en $\vec{a}\in A$, entonces $\vec{a}$ es un punto crítico de f. En particular, si f es diferenciable en $\vec{a}$ y presenta un extremo local en $\vec{a}$, entonces $\nabla f(\vec{a})=\vec{0}$.

Teorema 135 (*Localización de extremos absolutos*).— Si $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, los posibles puntos en los que f pudiese presentar un extremo absoluto son: bien puntos de la frontera de A, bien puntos interiores de A en los que ∇f no existe, bien puntos interiores de A en los que $\nabla f(\vec{a})=\vec{0}$.

Definición 2.49 (Punto de silla de un campo escalar).— Punto crítico para un campo escalar donde éste no alcanza un extremo local. En otras palabras, siendo $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\vec{a}\in A$ un punto no aislado de A, se dice que f alcanza/presenta/tiene un punto de silla en $\vec{a}$ precisamente si para toda bola abierta B centrada en $\vec{a}$ existen puntos $\vec{x}\in B\cap A$ tales que $f(\vec{x})<f(\vec{a})$ y existen puntos $\vec{y}\in B\cap A$ tales que $f(\vec{y})>f(\vec{a})$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 136 (*Condiciones de segundo orden para extremos locales y puntos de silla*).— Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A abierto, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^2 en A y $\vec{a} \in A$ un punto crítico de f. Entonces se tienen las siguientes condiciones de segundo orden.

- Condiciones necesarias:
  - Si f presenta un mínimo local en $\vec{a}$, entonces la función hessiana $q_{Hf(\vec{a})}$ es semidefinida positiva.
  - Si f presenta un máximo local en $\vec{a}$, entonces la función hessiana $q_{Hf(\vec{a})}$ es semidefinida negativa.
- Condiciones suficientes:
  - Si la función hessiana $q_{Hf(\vec{a})}$ es definida positiva, entonces f presenta un mínimo local estricto en $\vec{a}$.
  - Si la función hessiana $q_{Hf(\vec{a})}$ es definida negativa, entonces f presenta un máximo local estricto en $\vec{a}$.
  - Si la función hessiana $q_{Hf(\vec{a})}$ es indefinida, entonces f presenta un punto de silla en $\vec{a}$.

Teorema 137 (*Condiciones suficientes de segundo orden para extremos locales y puntos de silla. Caso de dos variables*).— Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A abierto, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^2 en A y $\vec{a} \in A$ un punto crítico de f. Entonces se satisface:

- Si $\left|Hf(\vec{a})\right| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) > 0$, entonces f presenta un mínimo local estricto en $\vec{a}$.
- Si $\left|Hf(\vec{a})\right| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) < 0$, entonces f presenta un máximo local estricto en $\vec{a}$.
- Si $\left|Hf(\vec{a})\right| < 0$, entonces f presenta un punto de silla en $\vec{a}$.
- Si $\left|Hf(\vec{a})\right| = 0$, entonces no puede afirmarse nada acerca de lo que f presenta en $\vec{a}$ (habríamos de estudiar el comportamiento de f en un entorno de $\vec{a}$).

2.10.0. Ejercicios resueltos

Cubit 101.

Hallemos las dimensiones del ortoedro de volumen 64 cm^3 de superficie mínima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f;
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuáles debiesen ser las dimensiones buscadas.

[EPS 19.12.2024:2.ª.2.A], [EFE 22.5.2025:II.2.A], [EFE 20.6.2025:II.2.A], *cfr.* ejemplo b (pp. 85–86) de: VALDERRAMA BONET, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Un esquema de resolución.—

a. El volumen de un ortoedro de dimensiones x, y, z, es xyz, por lo que la condición es $xyz = 64$; la superficie de dicho ortoedro es $2xy + 2xz + 2yz$; de la condición, $z = \dfrac{64}{xy}$, por lo que la función objetivo es $f(x,y) = 2xy + \dfrac{128}{x} + \dfrac{128}{y}$;
b. un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

o no existe; el gradiente de f es $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(2y-\frac{128}{x^2},2x-\frac{128}{y^2}\right)$; $\nabla f(x,y)$ no existe para puntos con $x=0$ o $y=0$, pero rechazamos éstos, pues no tendríamos ortoedro; de $\nabla f(x,y)=(0,0)$, de $2y-\frac{128}{x^2}=0$, tenemos $y=\frac{64}{x^2}$, que sustituyendo en $2x-\frac{128}{y^2}=0$, obtenemos $2x-\frac{x^4}{32}=0$, de donde $x\left(2-\frac{x^3}{32}\right)=0$ y, por lo tanto, $x=0$ o $x=4$; ya habíamos rechazado $x=0$, por lo que el único punto crítico es $\left(4,\frac{64}{4^2}\right)$, esto es, $(4,4)$;

c. las derivadas parciales de segundo orden de f son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{256}{x^3}$, $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(x,y)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{256}{y^3}$, que evaluadas en $(4,4)$ valen 4, 2, 4, respectivamente, por lo que el determinante hessiano de f en $(4,4)$ es $\left|Hf(4,4)\right|=\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}=12>0$, y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4)=4>0$, f presenta un mínimo local estricto en $(4,4)$, en otras palabras, la superficie mínima se obtiene siendo las dimensiones $x=4$, $y=4$ y $z=\frac{64}{4\cdot 4}=4$, esto es, precisamente si el ortoedro es un cubo de lado 4. ■

Cubit 102.

Descompongamos 15 en tres sumandos positivos de forma que su producto sea el máximo posible; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f;
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuál es la descomposición buscada.

[EFO 21.1.2025:II.2.A], *cfr.* problema resuelto 5.7 (pp. 138–139) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. Siendo x,y,z los sumandos, la condición es $x+y+z=15$ y la función objetivo, en principio, es $f(x,y,z)=xyz$; utilizaremos la sustitución directa para maximizar el campo escalar $f(x,y)=xy$ sujeto a dicha condición/restricción; de la condición, $z=15-x-y$, por lo que la función objetivo es $f(x,y)=xy(15-x-y)=15xy-x^2y-xy^2$;
b. un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de f es $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(15y-2xy-y^2,15x-x^2-2xy\right)=(y(15-2x-y),x(15-x-2y))$; $\nabla f(x,y)=(0,0)$ se satisface si, y sólo si, $y(15-2x-y)=0$ y $x(15-x-2y)=0$, esto es, si $y=0$ o $15-2x-y=0$ y si $x=0$ o $15-x-2y=0$, en definitiva, precisamente: I, si $y=0$ y $x=0$, o II, si $y=0$ y $15-x-2y=0$, o III, si $15-2x-y=0$ y $x=0$, o IV, si $15-2x-y=0$ y $15-x-2y=0$; resolviendo estos cuatro sistemas obtenemos los únicos puntos críticos de f, a saber, $(0,0)$ [de I], $(15,0)$ [de II], $(0,15)$ [de III] y $(5,5)$ [de IV];
c. las derivadas parciales de segundo orden de f son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-2y$, $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y\partial x}(x,y)=15-2x-2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2x$; la matriz hessiana es, por lo tanto, $Hf(x,y)=$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$\begin{pmatrix} -2y & 15-2x-2y \\ 15-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$; como el enunciado afirma que son sumandos positivos, descartamos como soluciones $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(15,0)$ y $(x,y)=(0,15)$; el determinante hessiano en el punto crítico $(5,5)$ es $|Hf(5,5)| = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 75 > 0$; como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,5) = -10 < 0$, f presenta un máximo local estricto —condicionado por la ecuación $x+y+z=15$—, en otras palabras, el máximo producto posible de los tres sumandos se obtiene siendo éstos $x=5$, $y=5$ y $z=15-5-5=5$. ■

Observación 53.— Los otros tres puntos críticos son puntos de silla; en efecto, los determinantes hessianos en ellos son negativos: $|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$, $|Hf(15,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 15 & -30 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$, $|Hf(0,15)| = \begin{vmatrix} -30 & 15 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$.

2.11. Optimización con restricciones de igualdad, por el método de los multiplicadores de Lagrange (ML)

2.11.0. ML(n,1). Problema con n variables y una condición

Queremos optimizar el campo escalar $f(\vec{x})$ (*función objetivo*) sujeto a la *condición/restricción* $g(\vec{x})=0$. Puede demostrarse que los candidatos a extremos condicionados están entre los puntos críticos de la función auxiliar

$$\Lambda(\vec{x},\lambda) = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x}) \quad \text{(lagrangiana)},$$

y que dichos puntos críticos $(\vec{a},\beta)$ son soluciones de

$$\nabla\Lambda(\vec{x},\lambda) = \vec{0},$$

esto es, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_1}(\vec{x},\lambda) &= 0 \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_2}(\vec{x},\lambda) &= 0 \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_n}(\vec{x},\lambda) &= 0 \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}(\vec{x},\lambda) &= 0 \end{cases}$$

(Dado el punto crítico $(\vec{a},\beta)$ de la lagrangiana, $\vec{a}$ es el posible punto donde f alcanza un extremo y β su multiplicador asociado).

Vía 0.ª.—

1. Construimos la lagrangiana $\Lambda(\vec{x},\lambda)$.
2. Resolviendo $\nabla\Lambda(\vec{x},\lambda)=\vec{0}$, hallamos los puntos críticos de la lagrangiana, $(\vec{a},\beta)$. Éstos determinan los puntos $\vec{a}$ posibles extremos de f.
3. Comprobamos que $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$ para cada punto $\vec{a}$ posible extremo de f.
4. Construimos la matriz hessiana de la lagrangiana respecto de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de orden $n\times n$,
$$H_{\vec{x}}\Lambda(\vec{x},\lambda) = Hf(\vec{x}) - \lambda Hg(\vec{x}).$$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\beta)$:
   I. calculamos el signo de la función hessiana $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}(\vec{x})$ en aquellos puntos $\vec{x}^*\neq\vec{0}$ tales que $\nabla g(\vec{a})\cdot\vec{x}^*=0$;
   II. clasificamos el extremo de f:
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}(\vec{x}^*)<0$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}(\vec{x}^*)>0$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}(\vec{x}^*)=0$, no podemos precisar nada.

Vía 1.ª.—

Los pasos 1, 2, 3 y 4 son los mismos.

5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\beta)$:
   I. calculamos el tipo[8] de la función hessiana $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}$;
   II. clasificamos el extremo de f:
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}$ es definida negativa, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}$ es definida positiva, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}$ es indefinida, no podemos precisar nada.

Vía 2.ª.—

Los pasos 1, 2, 3 y 4 son los mismos.

5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\beta)$:
   I. construimos la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en $(\vec{a},\beta)$, de orden $(n+1)\times(n+1)$,

$$H\Lambda(\vec{a},\beta)=\left(\begin{array}{c|c}0 & \nabla g(\vec{a})\\ \hline \nabla g(\vec{a})^t & H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)\end{array}\right)$$

   II. calculamos el signo de cada uno de los menores principales M_k con $k=3,4,\ldots,n+1$, donde n es el número de variables;
   III. clasificamos el extremo de f:
   - si todos estos menores son negativos, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$;
   - si todos estos menores son de signos alternos, siendo $M_3>0$ (y, por tanto, $M_4<0$, $M_5>0$, ...), entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado a $g(\vec{x})=0$.

2.11.1. ML(n,m). Problema con n variables y m condiciones ($m<n$)

Queremos optimizar el campo escalar $f(\vec{x})$ (*función objetivo*) sujeto a las *condiciones/restricciones* $g_1(\vec{x})=0$, $g_2(\vec{x})=0$, ..., $g_m(\vec{x})=0$. Puede demostrarse que los candidatos a extremos condicionados están entre los puntos críticos de la función auxiliar

$$\Lambda(\vec{x},\vec{\lambda})=f(\vec{x})-\lambda_1 g_1(\vec{x})-\lambda_2 g_2(\vec{x})-\cdots-\lambda_m g_m(\vec{x})\quad\text{(lagrangiana)}.$$

[8] Si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\beta)}$ es definida positiva (resp., definida negativa), también será definida positiva (resp., definida negativa) su restricción al subespacio de aquellos puntos $\vec{x}^*\neq\vec{0}$ tales que $\nabla g(\vec{a})\cdot\vec{x}^*=0$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

y que dichos puntos críticos son soluciones de

$$\nabla\Lambda(\vec{x},\vec{\lambda}) = \vec{0},$$

esto es, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_2}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_n}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial \lambda_1}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial \lambda_2}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial \lambda_m}(\vec{x},\vec{\lambda}) &= 0 \end{cases}$$

y que cada punto crítico $(\vec{a},\vec{\beta})$ de la lagrangiana determina un posible punto $\vec{a}$ donde f alcanza un extremo, para lo que es condición suficiente, pero no necesaria, que la matriz jacobiana del campo vectorial de restricciones $\vec{g}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (con funciones componentes $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) evaluada en $\vec{a}$, $J\vec{g}(\vec{a})$, tenga rango m (esto es, que en $J\vec{g}(\vec{a})$ exista un menor no nulo de orden m), o lo que es equivalente, que los vectores gradientes $\nabla g_1(\vec{a})$, $\nabla g_2(\vec{a})$, …, $\nabla g_m(\vec{a})$ sean linealmente independientes. A esta condición suficiente se le conoce como *condición de regularidad*.

Vía 0.ª.—

1. Construimos la lagrangiana $\Lambda(\vec{x},\vec{\lambda})$.
2. Resolviendo $\nabla\Lambda(\vec{x},\vec{\lambda}) = \vec{0}$, hallamos los puntos críticos de la lagrangiana, $(\vec{a},\vec{\beta})$. Éstos determinan los puntos $\vec{a}$ posibles extremos de f.
3. Comprobamos la condición de regularidad para cada punto $\vec{a}$ posible extremo de f.
4. Construimos la matriz hessiana de la lagrangiana respecto de las variables x_1, x_2, …, x_n, de orden $n \times n$,
$$H_{\vec{x}}\Lambda(\vec{x},\vec{\lambda}) = Hf(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hg_i(\vec{x}).$$
5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\vec{\beta})$:
   I. calculamos el signo de la función hessiana $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}(\vec{x})$ en aquellos puntos $\vec{x}^* \neq \vec{0}$ tales que $J\vec{g}(\vec{a})\vec{x}^* = \vec{0}$, esto es, tales que
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
   en otras palabras, tales que $\nabla g_1(\vec{a})\cdot\vec{x}^* = 0$, $\nabla g_2(\vec{a})\cdot\vec{x}^* = 0$, …, $\nabla g_m(\vec{a})\cdot\vec{x}^* = 0$;
   II. clasificamos el extremo de f:
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}(\vec{x}^*) < 0$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$;
- si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}(\vec{x}^*)>0$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$;
- si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}(\vec{x}^*)=0$, no podemos precisar nada.

Vía 1.ª.—

Los pasos 1, 2, 3 y 4 son los mismos.

5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\vec{\beta})$:
   I. calculamos el tipo[9] de la función hessiana $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}$;
   II. clasificamos el extremo de f:
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}$ es definida negativa, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}$ es definida positiva, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$;
   - si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}$ es indefinida, no podemos precisar nada.

Vía 2.ª.—

Los pasos 1, 2, 3 y 4 son los mismos.

5. Para cada punto crítico de la lagrangiana, $(\vec{a},\vec{\beta})$:
   I. construimos la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en $(\vec{a},\vec{\beta})$, de orden $(m+n)\times(m+n)$,

$$H\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & J\vec{g}(\vec{a}) \\ 0 & \dots & 0 & \\ \hline & J\vec{g}(\vec{a})^t & & H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta}) \end{array}\right)$$

   II. calculamos el signo de cada uno de los menores principales M_k con $k=2m+1,2m+2,\dots,m+n$;
   III. clasificamos el extremo de f:
   - si todos estos menores son del mismo signo que $(-1)^m$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un mínimo local estricto condicionado a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$;
   - si todos estos menores son de signos alternos, siendo M_{2m+1} del mismo signo que $(-1)^{m+1}$, entonces $f(\vec{x})$ alcanza en $\vec{a}$ un máximo local estricto condicionado a $\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}$.

2.11.2. Ejercicios resueltos

Cubit 103.

Hallemos las longitudes de los lados del rectángulo de perímetro dado p de área máxima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local;

[9] Si $q_{H_{\vec{a}}\Lambda(\vec{a},\vec{\beta})}$ es definida positiva (resp., definida negativa), también será definida positiva (resp., definida negativa) su restricción al subespacio de aquellos puntos $\vec{x}^*\neq\vec{0}$ tales que $J\vec{g}(\vec{a})\vec{x}^*=\vec{0}$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad;
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas.

[EPS 19.12.2024:2.ª.2.B], *Cfr.* problema resuelto 5.9 (pp. 143-144) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.—

a. El perímetro de un rectángulo de dimensiones x, y, es $2x+2y$, por lo que la condición es $2x+2y=p$; el área de dicho rectángulo es xy, por lo que la función objetivo es $f(x,y)=xy$; utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar el campo escalar $f(x,y)=xy$ sujeto a la condición/restricción $g(x,y)=2x+2y-p$;
b. la función lagrangiana es $\Lambda(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$, esto es, $\Lambda(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+2y-p)$; un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de Λ es $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)=\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}(x,y,\lambda),\frac{\partial\Lambda}{\partial y}(x,y,\lambda),\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)\right)=(y-2\lambda,x-2\lambda,-2x-2y+p)$; $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)$ no presenta problemas de existencia en $\mathbb{R}^3$; de $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)=(0,0,0)$, de $y-2\lambda=0$ y $x-2\lambda=0$, tenemos $y=x=2\lambda$, que sustituyendo en $-2x-2y+p=0$, obtenemos $-4\lambda-4\lambda+p=0$, de donde $\lambda=\frac{p}{8}$, por lo tanto, $x=y=2\cdot\frac{p}{8}=\frac{p}{4}$, por lo que el único punto crítico de la lagrangiana es $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right)$, de donde, el único punto donde f pudiese alcanzar un extremo local es $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)$;
c. $\nabla g(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=(2,2)$ por lo que $\nabla g\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)=(2,2)\neq(0,0)$, por lo que se satisface la condición de regularidad;
d. la matriz hessiana de la lagrangiana es $H_{(x,y)}\Lambda(x,y,\lambda)=Hf(x,y)-\lambda Hg(x,y)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, por lo que la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en su punto crítico $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right)$ es
$H\Lambda\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right)=\left(\begin{array}{c|c}0&\nabla g(p/4,p/4)\\\hline \nabla g(p/4,p/4)^t&H_{(p/4,p/4)}\Lambda(p/4,p/4,p/8)\end{array}\right)=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$; para averiguar el tipo de extremo local, precisamos analizar los menores principales M_k con $k=2m+1,\dots,m+n$, con n el n.º de variables y m el n.º de condiciones/restricciones; como en la situación de estudio $n=2$ y $m=1$, sólo necesitamos calcular el único menor principal de orden 3, $\begin{vmatrix}0&2&2\\2&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=8$, que resulta ser positivo, por lo que f alcanza en $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)$ un máximo local estricto, en otras palabras, el área máxima se obtiene siendo las dimensiones $x=y=\frac{p}{4}$, esto es, precisamente si el rectángulo es un cuadrado. ■

Cubit 104.

Calculemos el valor mínimo del paraboloide $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición $2x-4y+5=0$; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

un extremo local;

c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad;

d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas.

[EFO 21.1.2025:II.2.B], [EFE 22.5.2025:II.2.B], [EFE 20.6.2025:II.2.B], *cfr.* ejemplo a (p. 88) de: VALDERRAMA BONET, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Un esquema de resolución.—

a. Podemos leer en el enunciado que la condición/restricción es $2x-4y+5=0$ y que la función objetivo es $f(x,y)=x^2+y^2$; utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para minimizar el campo escalar $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeto a la condición/restricción $g(x,y)=2x-4y+5$;

b. la función lagrangiana es $\Lambda(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$, esto es, $\Lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(2x-4y+5)$; un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de Λ es $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)=\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}(x,y,\lambda),\frac{\partial\Lambda}{\partial y}(x,y,\lambda),\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)\right)=(2x-2\lambda,2y+4\lambda,-2x+4y-5)$; $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)$ no presenta problemas de existencia en $\mathbb{R}^3$; de $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)=(0,0,0)$, de $2x-2\lambda=0$ y $2y+4\lambda=0$, tenemos $x=\lambda$ e $y=-2\lambda$, que sustituyendo en $-2x+4y-5=0$, obtenemos $-2\lambda-8\lambda-5=0$, de donde $\lambda=\frac{-1}{2}$, por lo tanto, $x=\frac{-1}{2}$ e $y=-2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=1$, por lo que el único punto crítico de la lagrangiana es $\left(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2}\right)$, de donde, el único punto donde f pudiese alcanzar un extremo local es $\left(\frac{-1}{2},1\right)$;

c. $\nabla g(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=(2,-4)$ por lo que $\nabla g\left(\frac{-1}{2},1\right)=(2,-4)\neq(0,0)$, por lo que se satisface la condición de regularidad;

d. la matriz hessiana de la lagrangiana es $H_{(x,y)}\Lambda(x,y,\lambda)=Hf(x,y)-\lambda Hg(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, por lo que la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en su punto crítico $\left(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2}\right)$ es

$$H\Lambda\left(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2}\right)=\left(\begin{array}{c|cc}0&\nabla g(-1/2,1)\\\hline\nabla g(-1/2,1)^t&H_{(-1/2,1)}\Lambda(-1/2,1,-1/2)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}0&2&-4\\2&2&0\\-4&0&2\end{array}\right);$$

para averiguar el tipo de extremo local, precisamos analizar los menores principales M_k con $k=2m+1,\ldots,m+n$, con n el n.º de variables y m el n.º de condiciones/restricciones; como en la situación de estudio $n=2$ y $m=1$, sólo necesitamos calcular el único menor principal de orden 3, $\begin{vmatrix}0&2&-4\\2&2&0\\-4&0&2\end{vmatrix}=-40$, que resulta ser negativo, por lo que f alcanza en $\left(\frac{-1}{2},1\right)$ un mínimo local estricto —condicionado por la ecuación $2x-4y+5=0$—, en otras palabras, el área mínima se obtiene siendo las dimensiones $x=\frac{-1}{2}$ e $y=1$. ■

2.12. Cálculo de áreas y volúmenes por integración doble

2.12.0. Integración doble en rectángulos

Sean el rectángulo $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ y un campo escalar $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Teorema 138 (*Primera condición suficiente de integrabilidad*).— Si f es continuo en D, entonces f es integrable en D.

Teorema 139 (*Segunda condición suficiente de integrabilidad*).— Si f es acotado en D, y es continuo en D salvo como mucho en un subconjunto de D formado por una unión finita de grafos de funciones continuas, entonces f es integrable en D.

Teorema 140 (*de Fubini*).— Si f es acotado en D, y continuo en D, salvo como mucho en un subconjunto de D formado por una unión finita de grafos de funciones continuas, entonces si $(\forall x \in [a_1,b_1])\ (\exists \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy)$ y si $(\forall y \in [a_2,b_2])\ (\exists \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx)$ (condiciones de existencia integral), entonces las dos integrales iteradas tienen el mismo valor, esto es,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Ejemplo 75.

Comprobemos el teorema de Fubini para

$$\iint_{[0,1]\times[2,3]} (x+y)\,dx\,dy.$$

Un esquema de resolución.— Calculemos las dos integrales iteradas y veamos que tienen el mismo valor; en efecto:

$$\int_0^1\left(\int_2^3 (x+y)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3\right)dx = \int_0^1\left(x+\frac{5}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{5x}{2}\right)\Big|_0^1 = 3,$$
$$\int_2^3\left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right)dy = \int_2^3\left(\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_0^1\right)dy = \int_2^3\left(y+\frac{1}{2}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)\Big|_2^3 = 3;$$

en otras palabras,

$$\iint_{[0,1]\times[2,3]} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_2^3 (x+y)\,dy\right)dx = \int_2^3\left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right)dy = 3. \qquad \blacksquare$$

2.12.1. Integración doble en recintos acotados particulares (no rectángulos)

Siendo R el rectángulo envolvente de D y $\chi_R f$ la función indicatriz de f en R —esto es, $\chi_R f$ es f en D y 0 en $R\setminus D$—, como f es continuo en D, entonces f está acotado en R salvo en δD, por lo que $\chi_R f$ es integrable en R si δD está formada por una unión finita de grafos de funciones continuas, y entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R \chi_R f(x,y)\,dxdy.$$

Recintos elementales de integración

(Tipo 1) $\boxed{dydx}$ $\qquad D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a_1 \le x \le b_1, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

(Tipo 2) $\boxed{dxdy}$ $\quad D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a_2\leq y\leq b_2, \gamma_1(y)\leq x\leq \gamma_2(y)\}$

Teorema 141 (de descomposición).— Todo recinto D cuya frontera esté formada por una unión finita de grafos de funciones continuas puede descomponerse en una unión finita de recintos de tipo 1 y de tipo 2.

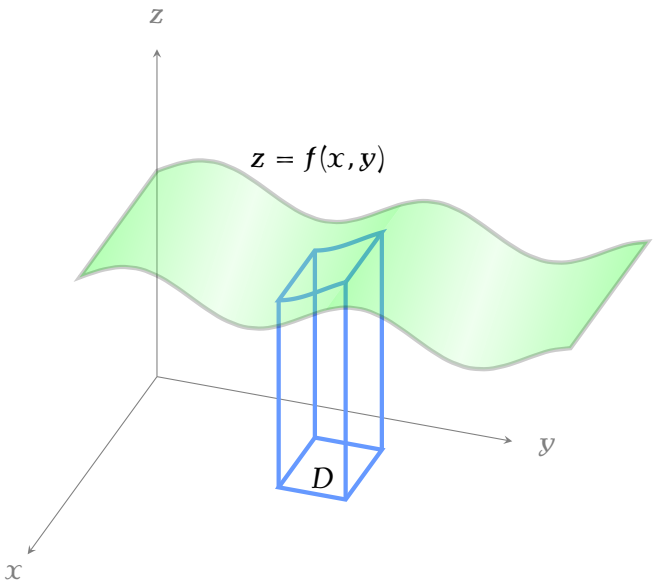
2.12.2. Interpretación geométrica

Como volumen

El valor de la integral doble

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

es el volumen de la región tridimensional acotada, por abajo, por el recinto D, por arriba, por la superficie $z=f(x,y)$, siendo sus puntos los interiores al continuo proyectivo del recinto en la superficie.



Como área

Si f es la función constante 1, entonces el valor de la integral doble

$$\iint_D 1\,dxdy$$

es el área del recinto D.

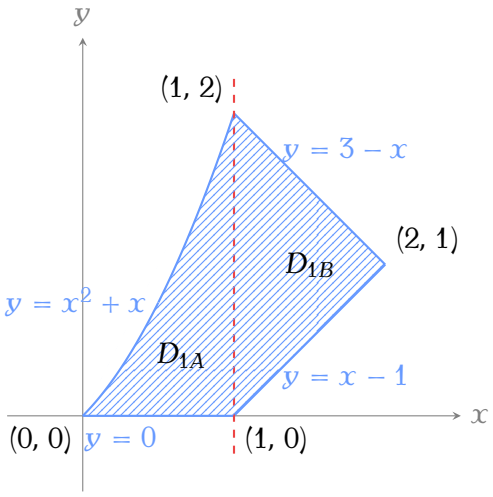
Ejemplo 76.

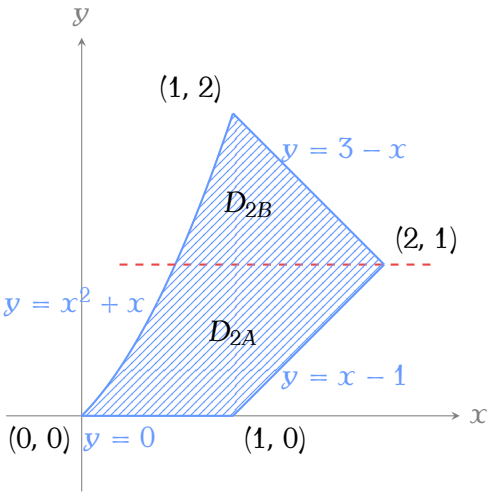
Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional acotada, por abajo, por el recinto (situado en el plano $z=0$) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x, 0\leq y, y\leq x^2+x, x+y-3\leq 0, x-y-1\leq 0\}$ y, por encima, por el plano $z=3$.

Un esquema de resolución.— Como la frontera de D está formada por la unión de los grafos de cuatro funciones continuas —a saber, $f_0(x)=0$, $f_1(x)=x-1$, $f_2(x)=3-x$ y $f_3(x)=$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

x^2+x—, el teorema de descomposición asegura que D puede descomponerse en una unión finita de recintos de tipo 1 y de tipo 2; en efecto, en el caso que nos ocupa, pudiésemos dividir D en dos recintos elementales de integración de tipo 1 (D_{1A} y D_{1B}) o en dos de tipo 2 (D_{2A} y D_{2B}):





Disponemos así de dos vías para calcular el volumen de interés.

Vía 0.

Siendo las dos recintos elementales de integración de tipo 1, $D_{1A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x^2+x\}$ y $D_{1B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2, x-1\leq y\leq 3-x\}$, calculamos el volumen pedido por

$$V=\int_0^1\left(\int_0^{x^2+x}3\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_{x-1}^{3-x}3\,dy\right)dx=\cdots=\frac{11}{2}.$$

Vía 1.

Siendo las dos recintos elementales de integración de tipo 2, $D_{2A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{4y+1})\leq x\leq y+1\}$ y $D_{2B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq y\leq 2, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{4y+1})\leq x\leq 3-y\}$, calculamos el volumen pedido por

$$V=\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4y+1})}^{y+1}3\,dx\right)dy+\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4y+1})}^{3-y}3\,dx\right)dy=\cdots=\frac{11}{2}.$$

Solución.— El volumen buscado es $\dfrac{11}{2}$, como hemos visto (vía 0) algo más sencillo de calcular mediante la descomposición de D en dos recintos elementales de integración de tipo 1. ■

2.12.3. Ejercicios resueltos

Los dos siguientes son ejemplos resueltos a partir de la descomposición del recinto de integración D en una unión de dos recintos elementales de integración de tipo 1.

Cubit 105.

Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo del plano $z=2$ sobre el conjunto del plano $z=0$ definido por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, y\leq x^2, x+y-2\leq 0, x-y-1\leq 0\}$.

[EPS 19.12.2024:3.ª.3.A], *cfr.* ejemplo 7.4 (p. 188–189) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Un esquema de resolución.— Dividimos D en dos recintos elementales de integración disjuntos, de tipo 1, en las que $f(x,y)=2$ es continua y, por tanto, integrable, a saber, $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 1, y\geq 0, y\leq x^2\}$ y $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1, x+y-2\leq 0, x-y-1\leq 0\}$; así: $V=\iint_D 2\,dx\,dy=\iint_{D_1}2\,dx\,dy+\iint_{D_2}2\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{x^2}2\,dy\,dx+\int_1^{3/2}\int_{x-1}^{-x+2}2\,dy\,dx=$
$2\left(\int_0^1 y\Big|_0^{x^2}dx+\int_1^{3/2}y\Big|_{x-1}^{-x+2}dx\right)=2\left(\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^{3/2}(-x+2-x+1)\,dx\right)=$
$2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(-x^2+3x)\Big|_1^{3/2}\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{3^2}{2^2}+\frac{9}{2}+1-3\right)=\frac{7}{6}.$ ■

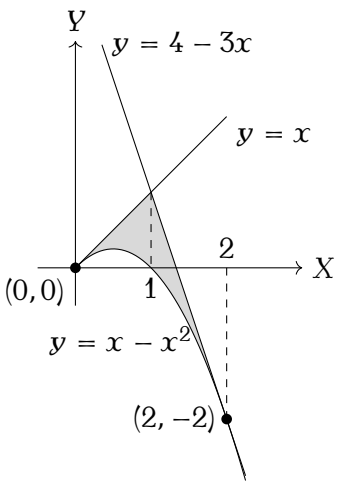
Cubit 106.

Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo de la superficie $z=xe^{y-x}$ sobre el conjunto del plano $z=0$ encerrado entre la parábola $y=x-x^2$ y las tangentes a ella en los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$ (esto es, las rectas $y=x$ e $y=4-3x$, respectivamente).

[EFO 21.1.2025:II.3.A], [EFE 22.5.2025:II.3.A], [EFE 20.6.2025:II.3.A], *cfr.* ejercicio 11.12 (p. 341) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.— En la figura hemos representado el recinto de integración, esto es, el conjunto del plano $z=0$ encerrado entre la parábola $y=x-x^2$ y las rectas $y=x$ e $y=4-3x$. Dichas parábola y rectas son funciones continuas por lo que este recinto, llamémoslo D, limitado por una unión de grafos de tres funciones continuas, podemos descomponerlo en una unión finita de recintos de tipo 1 y de tipo 2; en este caso, lo descomponemos en una unión de dos recintos de tipo 1, según x sea menor o igual que 1 o mayor o igual que 1.

Observamos, entonces, que en dicho plano, cuando x varía desde 0 hasta 1, y varía desde la parábola $y=x-x^2$ hasta la recta $y=x$, y cuando x varía desde 1 hasta 2, y varía desde la parábola $y=x-x^2$ hasta la recta $y=4-3x$.



Por esto, calculamos el valor del volumen de interés de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}V&=\iint_D xe^{y-x}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{x-x^2}^{x}xe^{-x}e^{y}\,dy\right)dx\\&\quad+\int_1^2\left(\int_{x-x^2}^{4-3x}xe^{-x}e^{y}\,dy\right)dx\\&=\int_0^1\left(xe^{-x}e^{y}\Big|_{y=x-x^2}^{y=x}\right)dx+\int_1^2\left(xe^{-x}e^{y}\Big|_{y=x-x^2}^{y=4-3x}\right)dx\\&=\int_0^1\left(xe^{-x}e^{x}-xe^{-x}e^{x-x^2}\right)dx+\int_1^2\left(xe^{-x}e^{4-3x}-xe^{-x}e^{x-x^2}\right)dx\\&=\int_0^1\left(xe^{0}-xe^{-x^2}\right)dx+\int_1^2\left(xe^{4-4x}-xe^{-x^2}\right)dx\\&=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+\left(-\frac{1}{4}xe^{4-4x}-\frac{1}{16}e^{4-4x}+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_{x=1}^{x=2}\end{aligned}$$

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

$$= \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-1}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}e^{-4}-\frac{1}{16}e^{-4}+\frac{1}{2}e^{-4}\right)-\left(-\frac{1}{4}e^{0}-\frac{1}{16}e^{0}+\frac{1}{2}e^{-1}\right)\right)$$
$$= \frac{-e^{-4}+5}{16}.$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de $\frac{-e^{-4}+5}{16}$ unidades de volumen. ■

2.13. Un vistazo al cálculo de volúmenes por integración triple

2.13.0. Integración triple en ortoedros

Sean el ortoedro $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ y un campo escalar $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 142 (*Primera condición suficiente de integrabilidad*).— Si f es continuo en D, entonces f es integrable en D.

Teorema 143 (*Segunda condición suficiente de integrabilidad*).— Si f es acotado en D, y es continuo en D salvo como mucho en un subconjunto de D formado por una unión finita de grafos de funciones continuas, entonces f es integrable en D.

Teorema 144 (*de Fubini*).— Si f es acotado en D, y continuo en D, salvo como mucho en un subconjunto de D formado por una unión finita de grafos de funciones continuas, entonces, si se satisfacen condiciones de existencia integral análogas a las del teorema de Fubini para integración doble, entonces las seis integrales iteradas tienen el mismo valor.

2.13.1. Integración triple en recintos acotados particulares (no ortoedros)

Siendo O el ortoedro envolvente de D y $\chi_O f$ la función indicatriz de f en O —esto es, $\chi_O f$ es f en D y 0 en $O \setminus D$—, como f es continuo en D, entonces f está acotado en O salvo en δD, por lo que $\chi_O f$ es integrable en O si δD está formada por una unión finita de grafos de funciones continuas, y entonces

$$\iiint_D f(x,y)\,dxdydz = \iiint_O \chi_O f(x,y)\,dxdydz.$$

Recintos elementales de integración

(Tipo 1) $\boxed{dzdydx}$ $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le b_1, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$

(Tipo 2) $\boxed{dzdxdy}$ $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \le y \le b_2, \gamma_1(y) \le x \le \gamma_2(y), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$

(Tipo 3) $\boxed{dydxdz}$ $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_3 \le z \le b_3, \gamma_1(z) \le x \le \gamma_2(z), \varphi_1(x,z) \le y \le \varphi_2(x,z)\}$

(Tipo 4) $\boxed{dydzdx}$ $D_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le b_1, \psi_1(x) \le z \le \psi_2(x), \varphi_1(x,z) \le y \le \varphi_2(x,z)\}$

(Tipo 5) $\boxed{dxdzdy}$ $D_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_2 \le y \le b_2, \psi_1(y) \le z \le \psi_2(y), \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\}$

(Tipo 6) $\boxed{dxdydz}$ $D_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_3 \le z \le b_3, \varphi_1(z) \le y \le \varphi_2(z), \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\}$

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

2.13.2. Interpretación geométrica como volumen

A modo de ejemplo, correspondiendo a un recinto elemental de integración de tipo 1, $\boxed{dzdydx}$, el valor de la integral

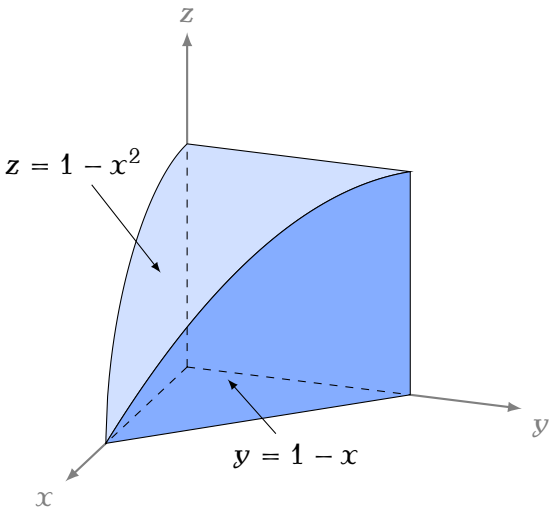
$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}1\,dz\right)dy\right)dx$$

es el volumen de la región tridimensional acotada, por abajo, por la superficie $z=\psi_1(x,y)$, por arriba, por la superficie $z=\psi_2(x,y)$, y por los lados, por los planos $x=a_1$, $x=a_2$, $y=\varphi_1(x)$ e $y=\varphi_2(x)$.

Ejemplo 77.

Calculemos por integración triple el volumen de la región tridimensional acotada, por abajo, por el plano $z=0$, por encima, por la superficie $z=1-x^2$, y por los lados, por los planos $x=0$, $y=0$ e $y=1-x$.

Un esquema de resolución.—



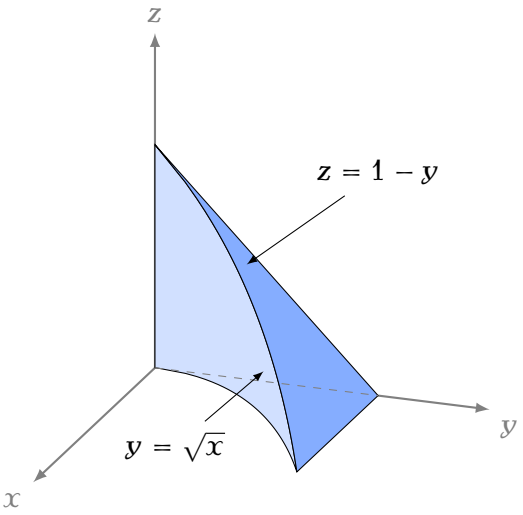
Solución.— $V=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x^2}1\,dz\right)dy\right)dx=\cdots=\frac{5}{12}$. ■

Ejemplo 78.

Calculemos por integración triple el volumen de la región tridimensional formada por los puntos situados por encima de $z=0$, por debajo de $z=1-y$, y entre $x=0$ e $y=\sqrt{x}$.

Un esquema de resolución.—

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/



Solución.— $V = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \left(\int_0^{1-y} 1\,dz \right) dy \right) dx = \cdots = \frac{1}{12}$. ■

2.13.3. Ejercicios resueltos

En los dos siguientes el recinto de integración D es un recinto elemental de integración de tipo 1.

Cubit 107.

Calculemos por integración triple el volumen del sólido tridimensional acotado, por abajo, por el plano $z = 0$, por encima, por el paraboloide $z = x^2 + 2y$, y por los lados, por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

[EPS 19.12.2024:3.ª.3.B], [EFE 22.5.2025:II.3.B], [EFE 20.6.2025:II.3.B], *cfr.* ejercicio 11.14 (p. 343) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.— $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+2y} 1\,dz\,dy\,dx =$ $\int_0^1 \int_0^{1-x} z\Big|_{z=0}^{z=x^2+2y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2y+y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (x^2(1-x)+(1-x)^2)\,dx = \int_0^1 (-x^3+2x^2-2x+1)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{4}+\frac{2}{3}-1+1 = \frac{5}{12}$. ■

Cubit 108.

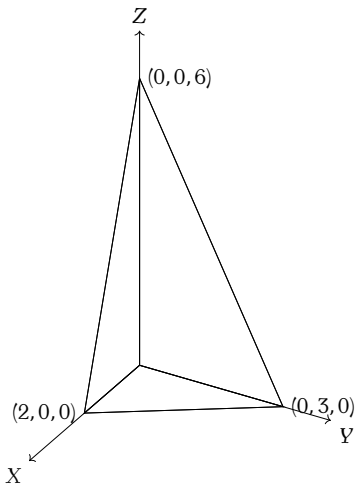
Calculemos por integración triple el volumen de la región $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + 2y + z \leq 6\}$.

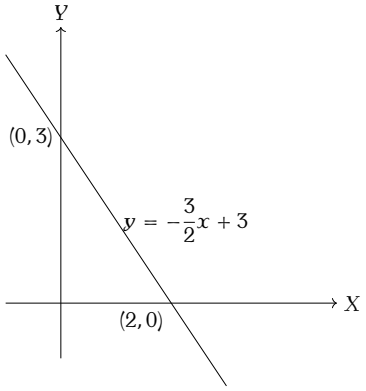
[EFO 21.1.2025:II.3.B], *cfr.* problema resuelto 8.1 (pp. 216–217) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Un esquema de resolución.— En la primera figura hemos representado la región tridimensional. En la segunda figura hemos representado el recinto de integración, esto es, el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre los ejes y la recta $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Es un recinto de tipo 1, llamémoslo D.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Observamos, entonces, que en dicho plano, cuando x varía desde 0 hasta 2, y varía desde la parábola $y=0$ hasta la recta $y=-\frac{3}{2}x+3$, y cuando $(x,0)$ varía hasta $\left(x,y=-\frac{3}{2}x+3\right)$, z varía desde $z=0$ hasta el plano $z=-3x-2y+6$.





Es por esto que calculamos el valor del volumen de interés de la siguiente manera:

$$V=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^{-3x/2+3}\int_0^{6-3x-2y}1\,dz\,dy\,dx=\int_0^2\left(\int_0^{-3x/2+3}z\Big|_{z=0}^{z=6-3x-2y}dy\right)dx$$
$$=\int_0^2\left(\int_0^{-3x/2+3}(6-3x-2y)\,dy\right)dx=\int_0^2(6y-3xy-y^2)\Big|_{y=0}^{y=-3x/2+3}dx$$
$$=\int_0^2\left(6\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-3x\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-\left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2\right)dx=\int_0^2\left(\frac{9}{4}x^2-9x+9\right)dx$$
$$=\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+9x\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{3}{4}\cdot 2^3-\frac{9}{2}\cdot 2^2+9\cdot 2=6-18+18=6.$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de 6 unidades de volumen. ■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Parte II

Algunas prácticas con Sage (y con apoyo ocasional de Wolfram|Alpha)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Dedicamos esta parte a *algunas, sólo algunas, de las cuestiones resueltas o propuestas como ejercicios de prácticas en las clases con computador* en la impartición en los años académicos 2024–2025, 2025–2026 y 2026–2027 de la asignatura Cálculo para la Edificación en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura. Para algunas, como anteriormente, los aquí presentes son ejemplos de esquemas de resolución. Para otras, quien lee habrá de descubrirlos. Debemos tener en cuenta que las cosas pueden hacerse de muchas formas para conseguir un mismo resultado (igual que las demostraciones o la resolución de cuestiones matemáticas sin artefactos). De la programación de computadores hay quienes hablan de arte[10]; lo paradójico es que, de la matemática (que incluye dicha programación como un capítulo del álgebra —y, por lo tanto, a la inteligencia artificial—) no lo duda nadie.

> *The only way to learn a new programming language is by writing programs in it* [La única manera de aprender un nuevo lenguaje de programación es escribir programas en él].[11]
>
> (Dennis MacAlistair Ritchie (1941–2011),
> https://es.wikipedia.org/wiki/Dennis_Ritchie;
> https://amturing.acm.org/award_winners/ritchie_1506389.cfm).

[10] *Vid. v. gr.* https://paulgraham.com/knuth.html.

[11] *Vid.* Brian Wilson Kernighan y Dennis MacAlistair Ritchie, *The C programming Language*, Prentice-Hall, 1988: 1.1 Getting Started.

Capítulo 3

Práctica CERO

Cuestión o.o

• Sea la función $f : [-2, 2] \longrightarrow [0, 4]$ definida por $f(x) = x^2$. Hallemos los nuevos dominios e imágenes si:

a. f es trasladada c unidades hacia arriba;
b. f es trasladada c unidades a la derecha;
c. f es trasladada c unidades hacia abajo;
d. f es trasladada c unidades a la izquierda;
A. representemos con Sage la función f en azul, y las trasladadas en el orden anterior en rojo, naranja, púrpura y verde, todas en la misma imagen;
e. f es dilatada/alargada verticalmente tres veces;
f. f es contraída/comprimida verticalmente tres veces;
B. representemos las situaciones anteriores, la dilatación en rojo y la contracción en naranja;
g. f es dilatada/alargada horizontalmente tres veces;
h. f es contraída/comprimida horizontalmente tres veces;
C. representemos las situaciones anteriores, la dilatación en rojo y la contracción en naranja;
i. f es reflejada verticalmente (actúa una simetría respecto de OX);
j. f es reflejada horizontalmente (actúa una simetría respecto de OY) (si $f(x) = f(-x)$, se trata de una función par);
k. actúa sobre f una composición de una reflexión horizontal y otra vertical (si $f(x) = -f(-x)$, se trata de una función impar [simétrica respecto del origen]);
D. dibujando la función en azul y su simétrica en rojo, representemos en Sage las situaciones anteriores para las siguientes funciones: 0.ª, $\operatorname{sen} x$; 1.ª, $-x^2$ si $x \in [-1, 0]$ y $\operatorname{sen} x$ si $x \in (0, 1)$, y 2.ª, $x^5 - 3x^3$, respectivamente.

[EFO 21.1.2025:I.Op.A] (sólo los apdos. A, B, C), [EFO 9.1.2026:I.0p.A] (sólo los apdos. A, B, C), [EFE 17.6.2026:I.0p.A] (sólo los apdos. A, B, C).

Un esquema de resolución.—

a. $\mathrm{D}_g = \mathrm{D}_f$; $\mathrm{Im}_g = \{y + c : y \in \mathrm{Im}_f\} = \{y : y - c \in \mathrm{Im}_f\}$;
b. $\mathrm{D}_g = \{x + c : x \in \mathrm{D}_f\} = \{x : x - c \in \mathrm{D}_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}_f$;
c. $\mathrm{D}_g = \mathrm{D}_f$; $\mathrm{Im}_g = \{y - c : y \in \mathrm{Im}_f\} = \{y : y + c \in \mathrm{Im}_f\}$;
d. $\mathrm{D}_g = \{x - c : x \in \mathrm{D}_f\} = \{x : x + c \in \mathrm{D}_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}_f$;

A.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

```
plot(x^2, (x,-2,2), color='blue') + plot(x^2+5, (x,-2,2), color='red') +
   plot((x-5)^2, (x,-2+5,2+5), color='orange') + plot(x^2-5, (x,-2,2),
   color='purple') + plot((x+5)^2, (x,-2-5,2-5), color='green')
```

e. $D_g = D_f$; $\mathrm{Im}_g = \{3y : y \in \mathrm{Im}_f\} = \{y : y/3 \in \mathrm{Im}_f\}$;
f. $D_g = D_f$; $\mathrm{Im}_g = \{y/3 : y \in \mathrm{Im}_f\} = \{y : 3y \in \mathrm{Im}_f\}$;

B.

```
plot(sin(x), (x,-5,5), color='blue') + plot(3*sin(x), (x,-5,5), color='
   red') + plot((1/3)*sin(x), (x,-5,5), color='orange')
```

g. $D_g = \{3x : x \in D_f\} = \{x : x/3 \in D_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}_f$;
h. $D_g = \{\frac{1}{3}x : x \in D_f\} = \{x : 3x \in D_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}_f$;

C.

```
plot(sin(x), (x,-5,5), color='blue') + plot(sin(1/3*x), (x,-5,5), color='
   red') + plot(sin(3*x), (x,-5,5), color='orange')
```

i. $D_g = D_f$; $\mathrm{Im}_g = \{-y : y \in \mathrm{Im}_f\} = \{y : -y \in \mathrm{Im}_f\}$;
j. $D_g = \{-x : x \in D_f\} = \{x : -x \in D_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \mathrm{Im}_f$;
k. $D_g = \{x : -x \in D_f\}$; $\mathrm{Im}_g = \{y : -y \in \mathrm{Im}_f\}$.

D.0.ª.
Con razón de aspecto 1:1 y divisiones de longitud $\pi/2$ en el eje de abscisas.

```
plot(sin(x), (x,-2*pi,2*pi), color='blue', aspect_ratio=1, ticks=[[-2*pi
   ,-3*pi/2,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,3*pi/2,2*pi],[-1,0,1]], tick_formatter=[
   pi,None]) + plot(-sin(x), (x,-2*pi,2*pi), color='red', aspect_ratio=1,
    ticks=[[-2*pi,-3*pi/2,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,3*pi/2,2*pi],[-1,0,1]],
   tick_formatter=[pi,None])
```

D.1.ª. Con razón de aspecto 1:1.

```
f = piecewise([([-1,0], -x^2), ((0,1), sin(x))]);
g = piecewise([([-1,0], sin(-x)), ((0,1), -(-x)^2)]); # f reflejada
   respecto de OY
plot(f, color='blue', aspect_ratio=1) + plot(-f, color='red',
   aspect_ratio=1) + plot(g, color='orange', aspect_ratio=1)
```

D.2.ª. Con razón de aspecto 1:1 y $f(x)$ tres veces más gruesa que $-f(-x)$.

```
f(x) = x^5 - 3*x^3
plot(f, (x,-2,2), color='blue', aspect_ratio=1, thickness=6) + plot(-f(-x
   ), (x,-2,2), color='white', aspect_ratio=1, thickness=2)
```

■

Cuestión 0.1

- Consideremos la función $\operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$.
  a. Hallemos su dominio, su imagen, su inversa (simetría respecto de la recta $y = x$) y el dominio de ésta.
  b. Hallemos también su inversa con Sage y representemos ambas funciones.

[EFO 21.1.2025:I.Op.B] (sólo el apdo. b), [EFE 22.5.2025:I.Op.B] (sólo el apdo. b), [EFE 20.6.2025:I.Op.B] (sólo el apdo. b), [EPP 10.11.2025:I.Op.A] (sólo el apdo. b).

Un esquema de resolución.—

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

a. $D_f = [-1,1]$; $\mathrm{Im}_f = (-\operatorname{sen}(1), \operatorname{sen}(1))$; $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$; $D_{f^{-1}} = (-\operatorname{sen}(1), \operatorname{sen}(1))$.
b. Con razón de aspecto 1:1.

```
var('x,y') # declarando las variables
assume(-1<=x<=1) # definiendo el dominio restringido de f
f(x) = sin(x) # definiendo f
# investigando el calcular la inversa: comienzo ---
#tmp=solve(x == f(y), y) # despejando y de x=f(y) para encontrar la
   inversa
#show(tmp) # mostrando el formato en el que devuelve la y despejada (
   un vector)
#show(tmp[0]) # mostrando la componente cero del vector (una igualdad)
#show(tmp[0].lhs()) # mostrando el miembro izquierdo de la igualdad
#show(tmp[0].rhs()) # mostrando el miembro derecho de la igualdad
# investigando el calcular la inversa: fin ---
g(x) = solve(x == f(y), y)[0].rhs() # definiendo la inversa de f
plot(f, (x,-1,1), color='blue', aspect_ratio=1) + plot(g, (x,-1,1),
   color='red', aspect_ratio=1) # representando f en azul y g en rojo,
    ambas en [-1,1]
```

■

Cuestión 0.2

- [•] Consideremos la función $\sqrt{8x^3-1}$ en $\mathbb{R}$.
  a. Hallemos su dominio, su imagen, su inversa (simetría respecto de la recta $y = x$) y el dominio de ésta.
  b. Hallemos también su inversa con Sage y representemos ambas funciones.
  c. Hallemos también su inversa con Wolfram|Alpha y representemos ambas funciones.

Un esquema de resolución.— Consideremos la función $\sqrt{8x^3-1}$ en $\mathbb{R}$.

a.
- *Dominio* de f.— Como $x \in D_f \leftrightarrow 8x^3 - 1 \geq 0 \leftrightarrow x^3 \geq \frac{1}{8} \leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, tenemos que $D_f = [1/2, +\infty)$.
- *Imagen* de f.— $\mathrm{Im}_f = [0, +\infty)$ (porque $f(1/2) = 0$ y x^3 es estrictamente creciente en D_f).
- *Inversa* de f.— Como $x = f(y) \leftrightarrow x = \sqrt{8y^3-1} \leftrightarrow x^2 = 8y^3 - 1 \leftrightarrow y^3 = \frac{x^2+1}{8} \leftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{8}}$, tenemos que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2+1}$.
- *Dominio* de f^{-1}.— $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$ (porque $D_f = [1/2, +\infty)$; como dominio amplio puede considerarse $\mathbb{R}$).

b.
```
var('x,y') # declarando las variables
assume(x >= 1/2) # definiendo el dominio restringido de f
f(x) = sqrt(8*x^3 - 1) # definiendo f
# investigando el calcular la inversa: comienzo ---
#tmp=solve(x == f(y), y) # despejando y de x=f(y) para encontrar la
   inversa
#show(tmp) # mostrando el formato en el que devuelve la y despejada (
   un vector)
#show(tmp[2]) # mostrando la componente dos del vector (una igualdad)
# (tmp[0] y tmp[1] son soluciones complejas y tmp[2] real)
#show(tmp[2].lhs()) # mostrando el miembro izquierdo de la igualdad
#show(tmp[2].rhs()) # mostrando el miembro derecho de la igualdad
# investigando el calcular la inversa: fin ---
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

```
g(x) = solve(x == f(y), y)[2].rhs() # definiendo la inversa de f
plot(f, (x,1/2,23), color='blue') + plot(g, (x,0,23), color='red') #
    representando f en azul y g en rojo
```

c. función inversa de `sqrt(8*x^3 - 1)` ■

Cuestión 0.3

☑ Hallemos los dominios, las imágenes, sus inversas y los dominios de éstas para las funciones:

a. $\dfrac{e^x}{1-e^x}$ en $\mathbb{R}$;
b. $\ln\dfrac{1-e^x}{e^x-2}$ en $\mathbb{R}$;
c. $e^{(x-1)/(x+1)}$ en $\mathbb{R}$;
d. $\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$ en $\mathbb{R}$.

Un esquema de resolución.—

a.
- *Dominio* de f.— Como $x \in \mathrm{D}_f \leftrightarrow 1-e^x \neq 0 \leftrightarrow e^x \neq 1 \leftrightarrow x \neq 0$, tenemos que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- *Inversa* de f.— Como $x = f(y) \leftrightarrow x = \dfrac{e^y}{1-e^y} \leftrightarrow e^y = x(1-e^y) \leftrightarrow e^y = x - xe^y \leftrightarrow e^y(1+x) = x \leftrightarrow e^y = \dfrac{x}{1+x} \leftrightarrow y = \ln\dfrac{x}{1+x}$, tenemos que $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x}{1+x}$.
- *Dominio* de f^{-1}.— Como $x \in \mathrm{D}_f^{-1} \leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} > 0 \leftrightarrow x < -1$ o $x > 0$, tenemos que $\mathrm{D}_{f^{-1}} = (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.
- *Imagen* de f.— $\mathrm{Im}_f = (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

b.
- *Dominio* de f.— Como $x \in \mathrm{D}_f \leftrightarrow \operatorname{sgn}(1-e^x) = \operatorname{sgn}(e^x-2) \leftrightarrow (1-e^x>0 \wedge e^x-2>0)\vee(1-e^x<0\wedge e^x-2<0)$, y como, en el primer caso, $1-e^x>0\wedge e^x-2>0 \leftrightarrow 0>x\wedge x>\ln 2$, lo que es imposible y, en el segundo caso, $1-e^x<0\wedge e^x-2<0 \leftrightarrow 0<x\wedge x<\ln 2$, tenemos que $\mathrm{D}_f = (0,\ln 2)$.
- *Inversa* de f.— Como $x = f(y) \leftrightarrow x = \ln\dfrac{1-e^y}{e^y-2} \leftrightarrow e^x = \dfrac{1-e^y}{e^y-2} \leftrightarrow (e^y-2)e^x = 1-e^y \leftrightarrow e^ye^x - 2e^x = 1-e^y \leftrightarrow e^y(e^x+1) = 1+2e^x \leftrightarrow e^y = \dfrac{1+2e^x}{e^x+1} \leftrightarrow y = \ln\dfrac{1+2e^x}{e^x+1}$, tenemos que $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$.
- *Dominio* de f^{-1}.— Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2e^x+1}{e^x+1} > 0$, tenemos que $\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
- *Imagen* de f.— $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$.

c.
- *Dominio* de f.— Como $x \in \mathrm{D}_f \leftrightarrow x+1 \neq 0 \leftrightarrow x \neq -1$, tenemos que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- *Inversa* de f.— Como $x = f(y) \leftrightarrow x = e^{(y-1)/(y+1)} \leftrightarrow \ln x = \dfrac{y-1}{y+1} \leftrightarrow y-1 = (y+1)\ln x \leftrightarrow y-1 = y\ln x + \ln x \leftrightarrow y(1-\ln x) = 1+\ln x \leftrightarrow y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$, tenemos que $f^{-1}(x) = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.
- *Dominio* de f^{-1}.— Como $x \in \mathrm{D}_{f^{-1}} \leftrightarrow x>0\wedge \ln x \neq 1 \leftrightarrow x>0\wedge x\neq e$, tenemos que $\mathrm{D}_{f^{-1}} = (0,+\infty)\setminus\{e\}$.
- *Imagen* de f.— $\mathrm{Im}_f = (0,+\infty)\setminus\{e\}$.

d.
- *Dominio* de f.— Como $x \in \mathrm{D}_f \leftrightarrow x>0\wedge\ln x\neq 1 \leftrightarrow x>0\wedge x\neq e$, tenemos que $\mathrm{D}_f = (0,+\infty)\setminus\{e\}$;
- *Inversa* de f.— Como $x = f(y) \leftrightarrow x = \dfrac{1+\ln y}{1-\ln y} \leftrightarrow 1+\ln y = x(1-\ln y) \leftrightarrow (1+x)\ln y = x-1 \leftrightarrow \ln y = \dfrac{x-1}{x+1} \leftrightarrow y = e^{(x-1)/(x+1)}$, tenemos que $f^{-1}(x) = e^{(x-1)/(x+1)}$.
- *Dominio* de f^{-1}.— Como $x \in \mathrm{D}_f^{-1} \leftrightarrow x+1\neq 0 \leftrightarrow x\neq -1$, tenemos que $\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- *Imagen* de f.— $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cuestión 0.4

☉ Consideremos la función $\operatorname{sen}(1/x)$ en $\mathbb{R}$. Representémosla con Sage en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. ¿Qué le sucede en las proximidades de cero?

Un esquema de resolución.— Con razón de aspecto 1:1.

```
plot(sin(1/x), (x,-2*pi,2*pi), color='blue', aspect_ratio=1, ticks=[[-2*
   pi,-3*pi/2,-pi,-pi/2,0,pi/2, pi, 3*pi/2,2*pi],[-1,0,1]],
   tick_formatter=[pi,None])
```

No tiene límite en cero. ■

Cuestión 0.5

☉ Consideremos la función $x\operatorname{sen}(1/x)$ en $\mathbb{R}$. Representémosla con Sage en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ y en $[-1/2, 1/2]$. ¿Qué le sucede en las proximidades de cero?

Un esquema de resolución.— Con razón de aspecto 1:1.

```
plot(x*sin(1/x), (x,-2*pi,2*pi), color='blue', aspect_ratio=1, ticks
   =[[-2*pi,-3*pi/2,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,3*pi/2,2*pi],[-1,0,1]],
   tick_formatter=[pi,None])

plot(x*sin(1/x), (x,-1/2,1/2), color='blue', aspect_ratio=1)
```

En cero, el límite es cero. ■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Capítulo 4

Práctica UNO

Cuestión 1.o

- [•] a. Investiguemos la paridad de las funciones x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 y x^5.
- b. La paridad de x^0, x^2 y x^4 se extiende a todas las funciones x^n de exponente par; investiguemos la paridad de x^{12}.
- c. La paridad de x^1, x^3 y x^5 se extiende a todas las funciones x^n de exponente impar; investiguemos la paridad de x^{23}.

(Optativo).— Investiguemos la paridad de x^{12} y x^{23} en Wolfram|Alpha, Maxima, Octave y R.

Un esquema de resolución.— Investiguemos la paridad de x^{12} con SageMath, Wolfram|Alpha, Maxima, Octave y R, con los artefactos en línea; el resto a analizar es similar a lo hecho. [✍].

```
# Sage (SageMath: https://sagecell.sagemath.org/)
g(x) = x^12
simplify(g(x) + g(-x))

# Wolfram|Alpha (https://www.wolframalpha.com)
simplifica (x^12 + (-x)^12)

# Maxima (Maxima on line: www.dma.ufv.br/maxima/)
f(x):=x^12;
define(g(x),f(x)+f(-x));
g(x);

# Octave (Octave Online: https://octave-online.net)
# (más complicado: hay que introducir un módulo de cálculo simbólico)
pkg load symbolic;
syms x;
g = @(x) x^12;
simplify(g(x) + g(-x))

# R (Snippets: https://rdrr.io/snippets/)
# (igualmente más complicado: hay que introducir un módulo de cálculo
   simbólico)
library(Ryacas0)
x <- Sym("x")
g <- function(x) x^12
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

```
Simplify(g(x) + g(-x))
```

Cuestión 1.1

☑ Con Sage, hallemos valores de k para que la función $f(x) = \dfrac{23}{23^x - 1} + k$ sea impar.

[EPP 11.11.2024:Op.A.a].

Un esquema de resolución.— Ordenándoselo a Sage

```
var('x,k') # definiendo las variables
f(x) = 23 / (23^x - 1) + k # definiendo f
# para que f sea impar debe satisfacerse f(x) + f(-x) = 0
solve(f(x) + f(-x) == 0, k) # hallando k
```

Solución.— $k = \dfrac{23}{2}$. ■

Nota.— Pudiésemos ordenárselo también, por ejemplo, al artefacto Wolfram|Alpha:

```
resuelve 23 / (23^x - 1) + k + 23 / (23^(-x) - 1) + k = 0 para k
```

Cuestión 1.2

☑ Con Sage:

a. hallemos las raíces (puntos de corte con OX) del polinomio $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$;
b. a la vista de cuáles son las raíces, representemos gráficamente dicho polinomio en un dominio restringido conveniente para la visualización de dichos puntos de corte.

Un esquema de resolución.— En Sage:

```
# a.
var('x') # declarando la variable x
pol = x^4 - 10*x^3 + 35*x^2 -50*x + 24 # definiendo el polinomio
sols = solve(pol == 0, x) # hallando los puntos de corte con OX (las raí
    ces reales del polinomio)
print('Las raíces de',pol,'son:')
show(sols)

# b.
p = plot(pol, (x, 0, 5)) # dibujando el polinomio en el dominio
    restringido [0,5]
p.show() # mostrando la gráfica del polinomio
```

Resulta que las raíces son 1, 2, 3 y 4, de ahí que elijamos el intervalo $[0,5]$ para la visualización de los puntos de corte. ■

Cuestión extra

☑ Con Sage:

a. hallemos los dos puntos de corte entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 1$;
b. mostremos en pantalla el mensaje «Los puntos de corte son:» y a continuación ambos puntos de corte en la forma $(x, y(x))$.

[EPP 11.11.2024:Op.B], [EFE 22.5.2025:I.Op.A], [EFE 20.6.2025:I.Op.A].

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.— En Sage:

```
# a.
var('x') # definiendo la variable x
f(x) = x^2 # definiendo f
g(x) = x + 1 # definiendo g
pc = solve(f(x) == g(x), x) # hallando las abscisas de los puntos de
    corte y almacenando dichas abscisas en la variable pc

# b.
x0 = pc[0].rhs() # miembro derecho de la igualdad que conforma la
    componente 0 de pc
y0 = f(x0) # ordenada del punto de corte de abscisa x0
x1 = pc[1].rhs() # miembro derecho de la igualdad que conforma la
    componente 1 de pc
y1 = f(x1) # ordenada del punto de corte de abscisa x1
show('Los puntos de corte son: (',x0,',',y0,') y (',x1,',',y1,')')
```

Cuestión 1.3

- [•] Representemos con Sage en $\mathbb{R}^2$ las esferas de centro $(0,0)$ y radio 1 para las distancias d_1, d_2, d_3 y d_{23} en azul, rojo, verde y púrpura, respectivamente.

Un esquema de resolución.— *Vid.* Cubit 25 (p. 46 de esta edición). ■

Cuestión 1.4

- [•] En el inicio de un futuro parque tecnológico se proyectan un edificio, una planta de producción y una subestación eléctrica. Dicho parque está ajardinado salvo su eje longitudinal (de norte a sur) que está provisto de pavimento técnico. Las ubicaciones del edificio y de la planta de producción ya han sido acordadas: el edificio, 2,5 hectómetros al este del límite norte de dicho eje; la planta de producción, en dicho eje, 10 hectómetros hacia el sur. Igualmente se acuerda que la subestación eléctrica también se sitúe en el eje, entre la perpendicular desde el edificio y la planta de producción, siendo la cuestión decidir en qué punto de ese tramo. El tendido de cableado subterráneo obedece a dos tipos de tramos: bajo zonas ajardinadas, donde el tendido se ejecuta a una velocidad de 0,12 hm/h, y bajo pavimento técnico, donde la velocidad es de 0,7 hm/h. ¿En qué punto del eje principal conviene construir la subestación eléctrica para minimizar el tiempo total de instalación del cableado desde la subestación hasta ambos edificios?

Un esquema de resolución.— Utilizando el artefacto SageMath:

```
var('d') # declarando la variable distancia de la plataforma a la
    subestación
L = sqrt(1 + (10 - d)^2) # definiendo la distancia de la subestación al
    edificio, en hectómetros
t_se = L / 0.12 # definiendo t_se: tiempo invertido en el tendido elé
    ctrico desde la subestación al edificio, en horas
t_sp = d / 0.7 # definiendo t_sp: tiempo invertido en el tendido elé
    ctrico desde la subestación a la planta de producción, en horas
t(d) = t_se + t_sp # definiendo t: tiempo total en función de d
table([(d,float(t(d))) for d in [0..10]], header_row=["d", "t(d)"], frame
    =True) # https://doc.sagemath.org/html/en/reference/misc/sage/misc/
    table.html
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Comprobamos que el mínimo parece alcanzarse en 10, esto es, en el eje, a 10 hectómetros al norte de la plataforma.

Si bien esto no es del todo correcto; es cierto que de los once puntos analizados, el menor valor se alcanza en 10 (con un valor de 22,619047... horas), pero en realidad el mínimo de la función en $[0, 10]$ no se alcanza en 10.

Como aún no sabemos calcularlo de otra forma, utilicemos el artefacto Wolfram|Alpha:

```
mínimo de d/0.7 + sqrt(1 + (10 - d)^2)/0.12
```

Reporta que se alcanza en d = 10 – 6/sqrt(1189).

Utilicemos de nuevo Sage para hallar el valor de la función en ese punto:

```
float(t(10-6/sqrt(1189)))
```

Reporta un valor de 22,495685... horas.

En fin, que hubiésemos de situar la subestación, en el eje, a una distancia d = 10 – 6/sqrt(1189) = 9,825995... hectómetros al norte de la plataforma. ■

Observación 54.— Claro que también podríamos utilizar una instrucción de SageMath para calcular el valor mínimo de la función en el intervalo $[0, 10]$ y en qué punto de dicho intervalo se alcanza éste (sin utilizar explícitamente la derivabilidad):

```
var('d')
L = sqrt(1 + (10 - d)^2)
t_se = L / 0.12
t_sp = d / 0.7
t = t_se + t_sp
find_local_minimum(t,0,10)[1] # la componente 1 proporciona el valor de d
    (donde se alcanza el mínimo), la componente 0, el valor de t(d) (el
   valor del mínimo)
# pudiésemos, por tanto, recoger los valores en dos variables por si los
   utilizásemos más adelante:
valor_t,valor_d = find_local_minimum(t,0,10)
print('Valor de t(d): ', valor_t)
print('Valor de d: ', valor_d)
```

Observación 55.— Si además quisiésemos imprimir la tabla controlando el número de dígitos significativos, pudiésemos hacerlo así:

```
var('d') # declarando la variable distancia de la plataforma a la
   subestación
L = sqrt(1 + (10 - d)^2) # definiendo la distancia de la subestación al
   edificio, en hectómetros
t_se = L / 0.12 # definiendo t_se: tiempo invertido en el tendido elé
   ctrico desde la subestación al edificio, en horas
t_sp = d / 0.7 # definiendo t_sp: tiempo invertido en el tendido elé
   ctrico desde la subestación a la planta de producción, en horas
t(d) = t_se + t_sp # definiendo t: tiempo total en función de d
show(table([(d,float(t(d))) for d in [0..10]], header_row=["d", "t(d)"],
   frame=True)) # con show logramos mantener la tabla anterior para poder
    compararla con la siguiente
```

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
table = [[i, float(t(i))] for i in range(11)] # generamos la tabla de
   valores de t en [0,10]
print(" i   |  t(i)") # imprimiendo la tabla
print("-----------------")
for row in table: # recorriendo la tabla por filas
        print(f"{row[0]:2d}  |  {row[1]:.7f}") # formato: primer valor de
            la fila row, número entero de dos cifras, y segundo valor de
           la fila row, número decimal con 7 decimales
```

Y si además quisiésemos ver la representación de la función, añadamos al código anterior:

```
plot(t(d), (d, 0, 10)) # dibujando t en [0,10]
```

Cuestión 1.5

- [•] Sea $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$; con Sage:
  a. construyamos y mostremos dos tablas de valores de $f(x)$, una para $x = 1, 1/10, 1/10^2, \ldots, 1/10^{10}$ y la otra para $x = -1, -1/10, -1/10^2, \ldots, -1/10^{10}$; a partir de ellas, intuyamos la existencia del límite l de f cuando x tiende a 0 y su valor;
  b. dibujemos la gráfica de f e intuyamos el valor de l a partir de dicha gráfica;
  c. calculemos l;
  d. para $\epsilon = 0{,}0123$, calculemos el mayor $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$ (*sugerencia*: hallemos las abscisas de los puntos de intersección de las rectas $y = l - 0{,}0123$ e $y = l + 0{,}0123$ con f).

Cfr. ejercicio 3.1, pp. 90-92, de: Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Un esquema de resolución.—

```
# a.
f(x) = 3*x^2 + 5*x + 7 # definiendo f
print("Tabla de valores para x = 1/10^i:")
tI=table([(x,float(f(x))) for x in [1/10^i for i in range(1, 10)]],
   header_row=["x", "f(x)"], frame=True)
print(tI)
print("\nTabla de valores para x = -1/10^i:")
tII=table([(x,float(f(x))) for x in [-1/10^i for i in range(1, 10)]],
   header_row=["x", "f(x)"], frame=True)
print(tII)

# Intuimos que el límite de f cuando x -> 0 es 7

# b.
plot(f, (x, -1, 1)) # dibujando la gráfica de f

# A partir de la gráfica, intuimos el mismo valor para el límite

#c.
l = limit(f(x), x=0) # calculando el límite
print("\nEl límite de f(x) cuando x tiende a 0 es:", l) # mostrando el lí
   mite
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
#d.
y1 = l-0.0123 # rectas
y2 = l+0.0123

eq1 = solve(f(x) == y1, x) # puntos de intersección de f con las rectas
eq2 = solve(f(x) == y2, x)
sols_eq1 = [sol.rhs() for sol in eq1]
sols_eq2 = [sol.rhs() for sol in eq2]

print("Abscisas de los puntos de intersección con la recta y =", y1, '(y=
    l-0.0123) :', sols_eq1[0].n(), ',',sols_eq1[1].n())
print("Abscisas de los puntos de intersección con la recta y =", y2, '(y=
    l+0.0123) :', sols_eq2[0].n(), ',',sols_eq2[1].n())
delta_izq = float(abs(sols_eq1[0]-sols_eq2[0])/2)
delta_der = float(abs(sols_eq1[1]-sols_eq2[1])/2)
delta_mayor = max(delta_izq,delta_der)
print("El mayor delta es: ", delta_mayor)
```

■

Cuestión 1.6

- [•] Una balsa contiene 10 litros de agua pura. Se filtra agua impura que contiene 20 gramos de tóxicos por litro a razón de 2 litros por minuto. Apoyándonos en Sage:
  a. Expresemos la concentración de tóxicos $C(t)$ después de t minutos (en gramos por litro —g/l—).
  b. Construyamos y mostremos una tabla mostrando tiempos y concentración de tóxicos, los primeros 15 minutos de 1 en 1, luego de 5 en 5 hasta que la concentración supere los 19 g/l.
  c. ¿Cuál será la concentración de tóxicos a largo plazo?

Un esquema de resolución.—

```
# a.
var('t') # variable tiempo t
assume(t>=0)
V(t) = 10 + 2*t # volumen de agua tras t minutos
A(t) = 40*t # cantidad de tóxicos tras t minutos
C(t) = A(t) / V(t) # concentración de tóxicos en el instante t
print(C(t))

# b.
s = solve(C(t)==19,t)
tI = table([(t,float(C(t))) for t in range(1, 15)], header_row=["t", "C_t
    "], frame=True)
tII = table([(t,float(C(t))) for t in range(15, s[0].rhs()+10, 5)], frame
    =True)
print(tI,tII)

# c.
C_largo = limit(C(t), t=oo)
print("Concentración de tóxicos a largo plazo:", float(C_largo))
```

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

■

Cuestión 1.7

- [•] Un estanque recibe agua de una balsa subterránea, a la vez que pierde agua por evaporación. I) De la balsa recibe agua de forma periódica a lo largo del día, variando la cantidad en función del tiempo, alcanzando un máximo de 1000 l/h en los momentos de mayor flujo y un mínimo de 0 l/h en los momentos de menor flujo, repitiéndose este ciclo cada 24 horas, y II) la tasa de evaporación del agua del estanque varía con la temperatura, que aumenta durante el día, sucediendo que al principio del día, dicha tasa es de 50 l/h, tasa que aumenta conforme avanza el día, sugiriéndose que la evaporación crece de manera cuadrática con el tiempo. Apoyándonos en Sage:
  a. Modelicemos la cantidad de agua recibida $B(t)$ por la balsa y la tasa de evaporación $E(t)$.
  b. ¿Qué cantidad de agua hay en el estanque después de 12 horas, si inicialmente contenía 5000 litros?
  c. ¿Cuánta agua contendrá el estanque a largo plazo?
  d. Analicemos la continuidad de $B(t)$, $E(t)$ y del cambio neto de la cantidad de agua en el estanque.
  e. Repitamos esta cuestión siendo un poquitín más realistas: en promedio, los días se inician a 10°, alcanzando los 30° a las 16 h y finalizando de nuevo con 10°.

Un esquema de resolución.—

```
# a.
var('t c')
B(t) = 1000 * abs(sin(pi*t/12))
E(t) = 50 + t^2
print('B(t) =',B(t),';','E(t) =',E(t),'.')

# b.
print('Después de 12 horas hay',5000 + B(12) - E(12),'litros.')

# c.
l_largo = limit(B(t)-E(t),t=oo)
print('Que el límite a largo plazo sea',l_largo,'significa que el
   estanque se vaciará.')

# d.
l = limit(B(t)-E(t),t=c)
print('Es continua en todo punto c porque limit(B(t)-E(t),t=c) es',l,'que
    es igual a B(c)-E(c) la cual es',B(c)-E(c),'.')

# e.
# e.a.
T(t) = 10*cos(pi*(t-16)/12)+20
E_nueva(t) = 50 + T(t)
# e.b.
print('Después de 12 horas hay',5000 + B(12) - E_nueva(12),'litros.')
# e.c.
l_largo = limit(B(t)-E_nueva(t),t=oo)
print('Que el límite a largo plazo sea',l_largo,'significa que a largo
   plazo la cantidad de agua en el estanque oscilará.')
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
# e.d.
l = limit(B(t)-E_nueva(t),t=c)
print('Es continua en todo punto c porque limit(B(t)-E_nueva(t),t=c) es',
    l,'\n','que es igual a B(c)-E_nueva(c) la cual es',B(c)-E_nueva(c),'.'
    )

# visualización
print('Gráficas de la cantidad de agua en el estanque a largo plazo, B-E
    en azul y de B-E_nueva en rojo:')
pI = plot(B(x)-E(x),0,100,color='blue')
pII = plot(B(x)-E_nueva(x),0,100,color='red')
show(pI,pII)
```

■

Observación 56.— En las cuestiones 1.7 y 1.8 la información no es suficiente para una modelización ni siquiera aproximada; he puesto ejemplos de funciones que pudiesen modelizar las situaciones descritas. En la cuestión 1.7 se modeliza con la información provista que haya un par de flujos máximos; si utilizásemos `C(t) = 1000 * abs(sin(pi*t/6))` estaríamos intentando modelizar cuatro flujos máximos a lo largo del día; aunque con esta función no haya suavidad en los mínimos locales; insisto, a falta de información de la distribución del flujo, es un mero ejemplo de función «válida».

Cuestión 1.8

- El consumo energético de un edificio de oficinas varía a lo largo del día según el número de personas y el uso de equipamiento eléctrico y electrónico: I., se sabe que el consumo por persona es de 50 W, que entre las 9:00 y las 11:00 se alcanza un máximo de 200 personas en el edificio, y que tal consumo sigue un patrón sinusoidal, disminuyendo significativamente, casi nulo, después de las 20:00, y II., el equipamiento consume constantemente energía durante las horas laborales, un total de 8000 W entre las 8:00 y las 20:00, pero los equipos se apagan automáticamente entre las 20:00 y las 22:00, reduciéndose el consumo a 2000 W en ese tramo y siendo nulo desde las 22:00 a las 8:00. Apoyándonos en Sage:
  a. Modelicemos el consumo por personas $C(t)$ y por equipamiento $E(t)$.
  b. Determinemos el consumo energético total del edificio a las 10:00.
  c. ¿Qué sucede con el consumo energético total a largo plazo?
  d. Analicemos la continuidad como funciones de $C(t)$, $E(t)$ y del consumo total.

Un esquema de resolución.—

```
# a.
var('c t')
C(t) = 50 * (100 + 100 * sin(pi*(t - 4)/12))
E(t) = piecewise([([8,8], 8000), ((8,20), 8000), ([20,20], 2000),
    ((20,22), 2000), ([22,22], 0), ((22,infinity), 0)],var=t)

# b.
C_total = C + E
print('C(10) =',float(C(10)),'; E(10) =',float(E(10)),'; C_total(10) =',
    float(C_total(10)))

# c.
l_E = limit(E(t),t=+oo,algorithm='giac') # esto va de las entrañas de
    Sage, que utiliza para calcular 'maxima', 'sympy', 'mathematica_free',
     'fricas', 'giac' o 'libgiac'; por ejemplo, los algoritmos <<maxima>>
```

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
   (por defecto para el límite) y <<sympy>> fallan con esta función
   definida a trozos; <<giac>> sí lo calcula
l_C = limit(C(t),t=+oo)
l_C_total = l_C + l_E
print('Cuando t -> +oo: lím C(t) =',l_C,'; lím E(t) =',l_E,'; lím C_total
   (t) =',l_C_total)
# obs.: lo he hecho por suma de límites porque si utilizamos limit(
   C_total(t),t=+oo,algorithm='giac') el resultado es undef, pero
   claramente ind + 0 = ind
# En definitiva, el consumo energético total a largo plazo no se
   estabiliza, sino que oscila en el rango de 0 a 10000 W.

# d.
l = limit(C(t),t=c)
print('C(t) es continua en todo punto c porque limit(C(t),t=c) es',l,'que
    es igual a C(c) la cual es',C(c),'.')
lE20_i = limit(E(t),t=20,dir='left',algorithm='giac')
lE20_d = limit(E(t),t=20,dir='right',algorithm='giac')
print('E(t) no es continua en t = 20 porque cuando t -> 20, el límite por
    la izqda. es',lE20_i,'mientras que el límite por la dcha. es',lE20_d,
   '.')
lE22_i = limit(E(t),t=22,dir='left',algorithm='giac')
lE22_d = limit(E(t),t=22,dir='right',algorithm='giac')
print('Tampoco es continua en t = 22 ya que cuando t -> 22, el límite por
    la izqda. es',lE22_i,'mientras que el límite por la dcha. es',lE22_d,
   '.')
```

■

Observación 57.— Definiendo así $C(t)$, alcanza el máximo aproximadamente en $t = 10$, la mitad del intervalo de mayor presencia de personas en el edificio; pero con respecto a las cuestiones I.7 y I.8, recalco, a falta de mayor información, son infinitas las funciones válidas para modelizar estas situaciones.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Capítulo 5

Práctica DOS

Cuestión 2.o

• ¿Qué función usamos habitualmente para responder a la pregunta «¿Qué edad tienes?»? Representémosla con Sage.

Un esquema de resolución.— Se trata de la función suelo. Hemos tenido tiempo de investigar desde Cubit 46 cómo suprimir las líneas verticales en la representación con Sage de la función suelo; una posible solución es:

```
plot(floor(x),-5,5,exclude=[-5..5]) #excluyendo los puntos enteros de -5
   a 5
```

■

• Apéndice de la cuestión 2.0.—

[EPP 10.11.2025:I.Op.B], [EFO 9.1.2026:I.Op.B], [EFE 17.6.2026:I.Op.B].

Independientemente de que exista en Sage una instrucción para calcular la función truncamiento, implementémosla de acuerdo con su definición en función de las funciones suelo y techo[1]. (Lo haremos excluyendo los puntos enteros de −5 a 5).

```
f(x) = piecewise([ # definiendo la función truncamiento a trozos
((-oo, 0), ceil(x)), # techo de los negativos (-oo es menos infinito)
((0, oo), floor(x)), # suelo de los positivos (oo es más infinito)
([0,0],0)  # suelo de cero
])
# utilizamos show para conservar los diferentes dibujos:
show(f(0)) #mostrando el truncamiento de cero (comprobando que lo hemos
   definido bien)
show(plot(floor(x),-5,5,exclude=[-5..5],color='blue')) # mostrando el
   dibujo en azul de la función suelo desde -5 a 5
show(plot(ceil(x),-5,5,exclude=[-5..5],color='red'))# mostrando el dibujo
    en rojo de la función techo desde -5 a 5
show(plot(f,-5,5,exclude=[-5..5],color='green')) # mostrando el dibujo en
    verde de la función truncamiento desde -5 a 5
show(plot(floor(x),-5,5,exclude=[-5..5],color='blue') + plot(ceil(x),
   -5,5,exclude=[-5..5],color='red') + plot(f,-5,5,exclude=[-5..5],color=
   'green')) # dibujando las tres juntas (truncamiento la última para que
    se vea)
```

[1] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Funciones_de_parte_entera.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cuestión 2.1

• El índice de masa corporal (IMC) se define como el cociente entre el peso en kilos y el cuadrado de la altura en metros. Se dice que debiésemos mantenerlo entre 20 y 25. Por otra parte, un antiguo dicho asegura que gozaremos de buena salud si nuestro peso en kilos es igual a los centímetros en los que nuestra altura supera al metro. A ver, ¿si estamos entre quienes satisfacen este dicho, tenemos un IMC entre 20 y 25?

Cfr. pp. 30ss. de: ALSINA, Claudi. *Contar bien para vivir mejor*, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España: Rubes, 2004, ISBN: 9788449700163.

Un esquema de resolución.—

```
var('a x y') # definiendo variables
assume(a > 100) # asumiendo que nuestra altura supera el metro
IMC(a) = (100*a - 100)/(a^2) # gozaremos de buena salud
s = solve(20 <= IMC(a) <= 25) # calculando a qué alturas corresponde un
   IMC entre 20 y 25
s_i = s[0][0].rhs().n() # extremo inferior del intervalo solución
s_d = s[0][1].rhs().n() # extremo superior del intervalo solución
show('Solución: a tales que \t', s_i, '\t <= a <= \t', s_d)
Dy20 = plot(20,s_i-0.2,s_d+0.2,color='red') # dibujo de y = 20 # marco
   lateral de 0.2 arbitrario en todos los dibujos
Dy25 = plot(25,s_i-0.2,s_d+0.2,color='red') # dibujo de y = 25
Dx138 = implicit_plot(x==s_i,(x,s_i-0.2,s_d+0.2),(y,0,25),color='red') #
   dibujo de x = s_i
Dx361 = implicit_plot(x==s_d,(x,s_i-0.2,s_d+0.2),(y,0,25),color='red') #
   dibujo de x = s_d
DIMC = plot(IMC(a), s_i-0.2,s_d+0.2,color='blue') # dibujo de IMC
(Dy20+Dy25+Dx138+Dx361+DIMC).show(aspect_ratio='automatic') # dibujando
   todas juntas
```

Solución.— Para tener un IMC entre 20 y 25, nuestra altura debe estar aproximadamente entre 1,38 y 3,61 metros, en definitiva, ser superior a aproximadamente 1,38 metros. ■

Cuestión 2.2

• Con la ayuda de Sage, investiguemos los límites en cero de las siguientes funciones (estudiemos los límites laterales siempre que sea necesario) e interpretemos los resultados (para lo que pudiese ser de ayuda dibujarlas):

a. $\frac{x}{|x|}$;
b. $\operatorname{sen}(1/x)$;
c. $x\operatorname{sen}(1/x)$;
d. $\frac{1}{x}\operatorname{sen}(1/x)$;
e. $\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)$;
f. $x\operatorname{sen}(x)$;
g. $1/x$;
h. $1/x^2$;
i. $-1/x^2$;
j. $x - \lfloor x \rfloor$;
k. $\lfloor x \rfloor - x$;
l. $x - \lceil x \rceil$;
m. $\lceil x \rceil - x$;
n. representemos estas cuatro últimas conjuntamente, en Wolfram|Alpha.

Un esquema de resolución.—

a.
```
var('x') # declarando la variable x
f(x) = x/abs(x) # definiendo la función f
l = limit(f(x),x=0) # und = «undefined» (terminología de Sage) (lí
   mites laterales existen pero son distintos)
```

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
li = limit(f(x),x=0,dir='-') # (o dir='left') calculando el límite
   lateral izquierdo de f en 0
ld = limit(f(x),x=0,dir='+') # (o dir='right') calculando el límite
   lateral derecho de f en 0
print('lim =',l,' lim_izq =',li,' lim_der =',ld) # mostrando en
   pantalla el límite y los límites laterales
plot(f(x),-5,5,exclude=[0]) #excluyendo el punto 0
```

b.
```
var('x') # declarando la variable x
f(x) = sin(1/x) # definiendo la función f
l = limit(f(x),x=0) # ind = «indefinido aunque acotado» (terminología
   de Sage) (por ejemplo cuando presenta oscilación)
li = limit(f(x),x=0,dir='-') # (o dir='left') calculando el límite
   lateral izquierdo de f en 0
ld = limit(f(x),x=0,dir='+') # (o dir='right') calculando el límite
   lateral derecho de f en 0
print('lim =',l,' lim_izq =',li,' lim_der =',ld) # mostrando en
   pantalla el límite y los límites laterales
plot(f(x),-5,5,exclude=[0]) #excluyendo el punto 0
```

c. ✍;
d. ✍;
e. ✍;
f. ✍;

g.
```
var('x') # declarando la variable x
f(x) = 1/x # definiendo la función f
l = limit(f(x),x=0) # Infinity = «infinito complejo» (terminología de
   Sage) (el límite izquierdo es +∞ y el límite derecho es −∞, o
   viceversa)
li = limit(f(x),x=0,dir='-') # (o dir='left') calculando el límite
   lateral izquierdo de f en 0
ld = limit(f(x),x=0,dir='+') # (o dir='right') calculando el límite
   lateral derecho de f en 0
print('lim =',l,' lim_izq =',li,' lim_der =',ld) # mostrando en
   pantalla el límite y los límites laterales
plot(f(x),-5,5,exclude=[0]) #excluyendo el punto 0
```

h.
```
var('x') # declarando la variable x
f(x) = 1/x^2 # definiendo la función f
l = limit(f(x),x=0) # +Infinity = +∞ (la función crece, no estando
   acotada superiormente)
print('lim =',l) # mostrando en pantalla el límite
plot(f(x),-5,5,exclude=[0]) #excluyendo el punto 0
```

i.
```
var('x') # declarando la variable x
f(x) = -1/x^2 # definiendo la función f
l = limit(f(x),x=0) # -Infinity = −∞ (la función decrece, no estando
   acotada inferiormente)
print('lim =',l) # mostrando en pantalla el límite
plot(f(x),-5,5,exclude=[0]) #excluyendo el punto 0
```

j. ✍;
k. ✍;

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

l. ✍;
m. ✍;
n. `representa x-ceiling(x), ceiling(x)-x, x-floor(x), floor(x)-x` ■

Cuestión 2.3

• ¿Es cierto que $(\forall x \in \mathbb{R})(\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil \leq \operatorname{sen} x \leq \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor)$?

Un esquema de resolución.— Sí, visualicémoslo:

```
var('x')
f0 = floor(x) - ceil(x)
f1 = sin(x)
f2 = ceil(x) - floor(x)
p0 = plot(f0,(x, -23, 23), color='brown', exclude=[-23, 23])
p1 = plot(f1,(x, -23, 23), color='green', exclude=[-23, 23])
p2 = plot(f2,(x, -23, 23), color='blue', exclude=[-23, 23])
p0+p1+p2
```

■

Observación 58.— Alternativamente, en Wolfram|Alpha:

```
representa floor(x) - ceil(x), sin x, ceil(x) - floor(x)
```

Cuestión 2.4.A

• Con la ayuda de SageMath, demostremos que para todo $c \in \mathbb{R}$ tenemos las siguientes equivalencias de infinitésimos en c: $a^{(x-c)} - 1 \sim_c (x-c)\ln a$ (con $a > 0$);

Un esquema de resolución.—

```
var('a x c') # declarando las variables
f = a^(x-c)-1 # definiendo f
lf = limit(f, x=c) # comprobando que f es infinitésimo en c
g = (x-c)*log(a) # definiendo g
lg = limit(g, x=c) # comprobando que g es infinitésimo en c
h = f/g # definiendo f/g
lh = limit(h, x=c) # comprobando que f y g son equivalentes en c
print('Límites de f, g y f/g: ', lf,',',lg,',',lh,'.') # imprimiendo los
    límites
```

■

Cuestión 2.5

• Con la ayuda de SageMath:
  a. demostremos que $\tan(\pi/2 - x)$ y $1/x$ son infinitos en cero (indicación: calculemos los límites laterales);
  b. demostremos que para todo $c \in \mathbb{R}$, $\tan(\pi/2 - (x-c)) \sim_c 1/(x-c)$, esto es, que son infinitos equivalentes en c.
  c. dibujemos dichas funciones y comparémoslas en las proximidades de cero corroborando dicha equivalencia.

  Observación 59.— De lo anterior, en particular (para $c = 0$), tenemos que $\tan(\pi/2 - x) \sim_0 1/x$ (equivalencia de infinitos en cero).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Un esquema de resolución.—

```
# a.
var('x') # declarando las variables
f = tan(pi/2-x)
lfi = limit(f, x=0, dir='-')
lfd = limit(f, x=0, dir='+')
print('f(x) = tan(pi/2-x) es un infinito en 0 pues f(0-0) =',lfi,'y f
    (0+0) =',lfd)
g = 1/x
lgi = limit(g, x=0, dir='-')
lgd = limit(g, x=0, dir='+')
print('g(x) = 1/x es un infinito en 0 pues g(0-0) =',lgi,'y g(0+0) =',lgd
    )

# b.
var('c') # declarando las variables
fc = tan(pi/2-(x-c)) # definiendo fc
lfci = limit(fc, x=c, dir='-')
lfcd = limit(fc, x=c, dir='+')
print('fc(x) = tan(pi/2-(x-c)) es un infinito en c pues fc(c-0) =',lfci,'
    y fc(c+0) =',lfcd)
gc = 1/(x-c)
lgci = limit(gc, x=c, dir='-')
lgcd = limit(gc, x=c, dir='+')
print('gc(x) = 1/(x-c) es un infinito en c pues gc(c-0) =',lgci,'y gc(c
    +0) =',lgcd)
hc = fc/gc # definiendo fc/gc
lhc = limit(hc, x=c) # comprobando que fc y gc son equivalentes en c
print('fc(x) y gc(x) son infinitos equivalentes pues cuando x -> c, fc/gc
     ->',lhc)

# c.
pI = plot(tan(pi/2-x), xmin=-5,xmax=5,ymin=-25, ymax=25, exclude=[-pi, 0,
     pi])
pII = plot(1/x, xmin=-5,xmax=5,ymin=-25, ymax=25, color='red', exclude
    =[0])
pI+pII
```

■

Cuestión 2.8

- [•] Con la ayuda de SageMath, descubramos las asíntotas de:
  a. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2-5}{x(x^2-4)}$;
  b. $g(x) = \dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}$;
  c. $h(x) = \dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

Un esquema de resolución.—

a. ✍ (asíntotas: horizontal, $y=2$; verticales: $x=-2$, $x=0$, $x=2$);
b. ✍ (asíntotas: vertical, $x=-1$; oblicua, $y=x-1$);

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

c. asíntotas: verticales: $x = -1$, $x = 1$; oblicua, $y = x$; con SageMath:

```
var('x y') # declarando las variables
f(x) = (x^3-3*x)/(x^2-1)

# asíntotas verticales
sols = solve(1/f == 0, x) # buscando ceros del denominador vía ceros
   de la recíproca (aunque pudiésemos utilizar f.denominator())
print('Las asíntotas verticales son:')
for s in sols:
print('x =',s.rhs())

# asíntotas horizontales
ahi = limit(f,x=+oo)
ahd = limit(f,x=-oo)
print(ahi,ahd) # inspeccionamos el resultado
print('No tiene asíntotas horizontales.') # porque para f estos lí
   mites son infinitos

# asíntotas oblicuas
ao00 = limit(f/x,x=-oo)
ao01 = limit(f/x,x=+oo)
m0 = ao00 # pendiente
m1 = ao01
b0 = limit(f-m0*x,x=-oo) # término independiente
b1 = limit(f-m1*x,x=+oo)
print(m0, m1, b0, b1) # inspeccionamos el resultado
print('f tiene una asíntota oblicua: y = x.')
```

■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Capítulo 6

Práctica TRES

Cuestión 3.3

☑ Encontremos con la ayuda de Sage los valores b y c para que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$ si $|x - 2| < 1$ y $f(x) = x^2 + bx + c$ si $|x - 2| \geq 1$, sea continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Cfr. ejercicio 7, p. 99 de: Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Un esquema de resolución.—

```
var('x b c')

# definiendo la función
f(x) = piecewise([[(-infinity,1), x^2+b*x+c], [[1,1], x^2+b*x+c], [(1,3),
    x+1], [[3,3], x^2+b*x+c], [(3,infinity), x^2+b*x+c]],var=x)

# calculando los límites
# (en esta ocasión, sin utilizar piecewise)
# (la definición de f cambia en x=1 y en x=3)
f_int = x+1 # en (1,3)
f_ext = x^2+b*x+c # en el resto
l1i = limit(f_ext,x=1)
l1d = limit(f_int,x=1)
l3i = limit(f_int,x=3)
l3d = limit(f_ext,x=3)

# imprimiendo los límites laterales en 1 y 3
print('l1i =',l1i,', l1d =',l1d,', l3i =',l3i,', l3d =',l3d)

# hallando b y c para que existan los límites en 1 y 3
sisteq = solve([l1i==l1d,l3i==l3d],b,c)
b = sisteq[0][0].rhs()
c = sisteq[0][1].rhs()
print('b =',b,', c =',c)

# comprobando
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

```
#f_sust = f.substitute(b=sisteq[0][0].rhs(),c=sisteq[0][1].rhs())
f_sust = f.substitute(b=b,c=c) # sustituyendo los valores de b y c en f
#print(f_sust)
#show(f_sust)
l1d_sust = l1d.substitute(b=b,c=c) # sustituyendo los valores de b y c en
    l1d = b + c + 1
if (limit(f_sust,x=1,algorithm='sympy') == l1d_sust and limit(f_sust,x=3,
   algorithm='sympy') == l3i): # comprobando existencia de límites en 1 y
    3
        if (f_sust(1) == l1d_sust and f_sust(3) == l3i):  # comprobando
           continuidad en 1 y 3
                print('Todo correcto. Los valores son b =',b,'y c =',c,'.
                   ')
else:
        print('Algo fue mal.')
```

■

Cuestión 3.6

• (Regla de Leibniz). Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables n veces. Sabemos que la función derivada de su producto es $(fg)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Utilizando Sage, obtengamos:

a. dicha expresión de la derivada primera $(fg)'$;
b. la expresión de la derivada segunda $(fg)^{(2}$;
c. la expresión de la derivada tercera $(fg)^{(3}$;
d. la expresión de la derivada cuarta $(fg)^{(4}$;
e. ¿Intuimos la expresión para la derivada enésima $(fg)^{(n}$?

Cfr. ejercicio 4.5, pp. 143-144 de: Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Un esquema de resolución.—

```
# a.
x = var('x') # definiendo variables y funciones
f(x) = function('f')(x)
g(x) = function('g')(x)
deriv = diff(f(x) * g(x), x) # derivando el producto de f(x) por g(x)

# b.
deriv2 = diff(deriv, x)

# c.
deriv3 = diff(deriv2, x)

# d.
deriv4 = diff(deriv3, x)

print("Derivadas primera a cuarta del producto: \n", deriv, "\n", deriv2,
    "\n", deriv3, "\n", deriv4)
# Nota: en el resultado, diff(g(x), x, x) es la derivada segunda de g,
   diff(g(x), x, x, x) es la tercera, etc.
```

■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cuestión 3.8

- Tenemos una bolsa impermeable (dos rectángulos cosidos por tres lados) de dimensiones A cm la boca y B cm la profundidad. Queremos conocer las dimensiones x, y, z, en cm, de la caja rectangular de mayor volumen que es posible cubrir completamente con dicha bolsa.
  a. Establezcamos relaciones algebraicas entre x, y, z y A, B.
  b. Para $A = 40$ y $B = 50$ representemos en Sage el volumen de la caja en función de una de sus dimensiones y comprobemos lo anterior.

Cfr. pp. 69ss. de: ALSINA, Claudi. *Contar bien para vivir mejor*, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España: Rubes, 2004, ISBN: 9788449700163.

Un esquema de resolución.—

```
# a y b.
var('x y z')
vol = x*y*z
eq_boca = 2*x + 2*y == 40 # condición por la boca
eq_prof = z + x/2 == 50 # condición por la profundidad
vol_xz = vol.substitute(y=solve(eq_boca,y)[0].rhs())
vol_x = vol_xz.substitute(z=solve(eq_prof,z)[0].rhs())
print('La función',vol,'queda reducida a una variable:',vol_x,'.')

# Extremos locales:
dvol_x = diff(vol_x,x)
sols = solve(dvol_x == 0,x)
#show(sols)
print('Los puntos críticos de',vol_x,'son:',float(sols[0].rhs()),'y',
    float(sols[1].rhs()))
X = float(sols[0].rhs())

# ¿Mínimo?, ¿máximo?
ddvol_x = diff(dvol_x,x) # segunda derivada
ddvol_sust0 = ddvol_x.substitute(x=sols[0].rhs())
if ddvol_sust0 < 0:
        print('La función',vol_x,'alcanza un máximo en',float(sols[0].rhs
            ()),'.')
else:
        if ddvol_sust0 > 0:
                print('La función',vol_x,'alcanza un mínimo en',float(
                    sols[0].rhs()),'. Algo salió mal.')

# Medidas de la bolsa óptima y su volumen
Z = float(solve(eq_prof.substitute(x=sols[0].rhs()),z)[0].rhs())
Y = float(solve(eq_boca.substitute(x=sols[0].rhs()),y)[0].rhs())
print('La bolsa óptima es la de medidas x =',X,'cm, y =',Y,'cm y z =',Z,'
    cm y su volumen es',float(X*Y*Z),'cm^3.')
```

■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cuestión 3.9

- [•] Un avión va a comenzar la maniobra de aterrizaje cuando se encuentra a una distancia horizontal r de la cabecera de pista y a una altura h. Si en ese momento vuela con una velocidad horizontal constante, entonces, con la ayuda de Sage:
  a. encontremos un polinomio cúbico $f(x)$ que pudiese seguirse como trayectoria aceptable de aproximación (*indicación*: pensemos en lo que debe satisfacer tal polinomio y su derivada para los valores $x = 0$ y $x = r$);
  b. ¿cuál es la ecuación del vuelo para una altura h de 3000 m y una distancia r de 10 000 m?
  c. dibujemos la gráfica de la trayectoria seguida;
  d. creemos una animación representando el avión con un punto rojo moviéndose a lo largo de la trayectoria de aproximación seguida desde la distancia y altura de partida hasta aterrizar.

Cfr. ejercicio 4.7 (pp. 154ss.) de: Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Un esquema de resolución.—

```
# a.
var('a b c d r h x p') # declarando las variables
y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d # comenzando la búsqueda de un polinomio cú
    bico
conds = [y.subs(x=r) == h, diff(y, x).subs(x=r) == 0, y.subs(x=0) == 0,
    diff(y, x).subs(x=0) == 0] # introduciendo las condiciones iniciales
    siguiendo la indicación
coefs = solve(conds, a, b, c, d) # encontrando los coeficientes a, b, c y
     d
ec_vuelo = y.subs(coefs) # sustituyendo los coeficientes en y(x)
show('El polinomio cúbico (la trayectoria resultante) es y =',ec_vuelo)

# b.
ec_vuelo310 = ec_vuelo.subs({h: 3000, r: 10000}) # sustituyendo los
    valores de h y r
show('La ecuación del vuelo para h = 3000 metros y r = 10000 metros es y
    =',ec_vuelo310)

# c.
show('La gráfica de la trayectoria seguida y la animación del vuelo de
    aproximación son:')
plot(ec_vuelo310, (x, 0, 10000), color='blue').show() # dibujando la grá
    fica de la trayectoria seguida

# d.
trayectoria = plot(ec_vuelo310, (x, 0, 10000), color='blue') #
    almacenando dicha gráfica
anim = animate([trayectoria + point((10000 - p * 10000, ec_vuelo310.subs(
    x=10000 - p * 10000)), size=30, color="red") for p in srange(0, 1,
    0.01)], xmin=0, xmax=10000, ymin=0, ymax=3000) # creando la animación
anim.show() # mostrando la animación
```

■

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Capítulo 7

Práctica CUATRO

Cuestión 4.2.G

☑ Con la ayuda de SageMath representemos y calculemos el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$.

Cfr. ejercicio 10.12 (p. 302) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Un esquema de resolución.—

```
# a. Representación

var('x') # definiendo la variable
f = x^2 # definiendo la parábola
g = x + 1 # definiendo la recta y = x + 1
h = 2 - x # definiendo la recta y = 2 - x
plot(f,color='blue') + plot(g,color='green') + plot(h,color='red') #
   dibujando las tres gráficas para su examen

sol_fg = solve(f == g, x) # hallando los ptos. de intersección entre f y
   g
sol_fh = solve(f == h, x) # hallando los ptos. de intersección entre f y
   h
sol_gh = solve(g == h, x) # hallando los ptos. de intersección entre g y
   h
# print(sol_fg,sol_fh,sol_gh) # mostrando en pantalla el formato para su
   examen comparado con las gráficas

if sol_fg[0].rhs() < 0:  # hallando la abscisa de interés en f(x) = g(x)
        x_fg = sol_fg[0].rhs()
else:
        x_fg = sol_fg[1].rhs()
if sol_fh[0].rhs() > 0:  # hallando la abscisa de interés en f(x) = h(x)
        x_fh = sol_fh[0].rhs()
else:
        x_fh = sol_fh[1].rhs()
if sol_gh[0].rhs() > 0:  # hallando la abscisa de interés en g(x) = h(x)
        x_gh = sol_gh[0].rhs()
```

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

```
else:
        x_gh = sol_gh[1].rhs()

p_f = plot(f, (x, x_fg, x_fh), color="blue", legend_label="f(x) = x^2") #
    almacenando en p_f la orden de dibujar f en [x_fg, x_fh]
p_g = plot(g, (x, x_fg, x_gh), color="green", legend_label="g(x) = x + 1"
   ) # almacenando en p_g la orden de dibujar g en [x_fg, x_gh]
p_h = plot(h, (x, x_gh, x_fh), color="red", legend_label="h(x) = 2 - x")
   # almacenando en p_h la orden de dibujar h en [x_gh, x_fh]

area_fg = plot(f, (x, x_fg, x_gh), fill=g, fillcolor="lightgray",
   plot_points=500) # almacenando en area_fg la orden de sombrear el área
    entre f y g en [x_fg, x_gh]
area_fh = plot(f, (x, x_gh, x_fh), fill=h, fillcolor="lightgray",
   plot_points=500) # almacenando en area_fg la orden de sombrear el área
    entre f y h en [x_gh, x_fh]

p_total = p_f + p_g + p_h + area_fg + area_fh # almacenando en p_total la
    órdenes de dibujos y sombras anteriores
p_total.show(legend_loc="upper right") # ejecutando las órdenes
   almacenadas en p_total

# b. Cálculo del área

area_1 = float(integral(g - f, x, x_fg, x_gh)) # área entre f(x) y g(x)
   en [x_fg, x_gh]
area_2 = float(integral(h - f, x, x_gh, x_fh)) # área entre f(x) y h(x)
   en [x_gh, x_fh]
area_total = area_1 + area_2
print('Área plana encerrada =',area_total)
```

■

Cuestión 4.9

☉ Un toro es el sólido que se obtiene al girar una circunferencia alrededor de un eje que no la corte[1]. Con la ayuda de SageMath, calculemos, por dos métodos diferentes, el volumen de un toro con r el radio de la circunferencia y R ($R > r$) la distancia del centro de dicha circunferencia al eje de rotación.

Un esquema de resolución.—

```
var('x y R r')
assume(R > 0, R > r, r > 0)

# Volumen del toro por arandelas horizontales
# circunferencia centrada en (R,0) [(x-R)^2 + y^2 = r^2] y eje de rotació
   n x = 0:
# (semicircunferencia izquierda: x = R - sqrt(r^2 - y^2)) (
   semicircunferencia derecha: x = R + sqrt(r^2 - y^2))
Volar = integral(pi*(R + sqrt(r^2 - y^2))^2,y,-r,r) - integral(pi*(R -
   sqrt(r^2 - y^2))^2,y,-r,r)
```

[1] *Vid.* https://es.wikipedia.org/wiki/Toro_(geometría).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

```
show('Volumen(por arandelas horizontales)=',Volar,'=',Volar.simplify_full
    (),'.')

# Volumen del toro por capas verticales
# circunferencia centrada en (R,0) [(x-R)^2 + y^2 = r^2] y eje de rotació
    n x = 0:
Volcap_alt = integral(2 * pi * 2 * sqrt(r^2 - (x - R)^2) * x, x, R - r, R
     + r)
show('Volumen(por capas [C((R,0),r) en torno a x = 0])=',Volcap_alt,'.')

# Volumen del toro por capas verticales
# circunferencia centrada en (0,0) [x^2 + y^2 = r^2] y eje de rotación x
    = R (hecho en clase):
# (como función porque la utilizamos después en el ejemplo particular)
Volcap(R,r) = integral(2 * pi * (R-x) * 2 * sqrt(r^2 - x^2), x, - r, r)
show('Volumen(por capas [C((0,0),r) en torno a x = R])=',Volcap(R,r),'.')

# Ejemplo
R = 3  # Radio mayor del toro
r = 2  # Radio menor del toro
show('Si r=2 y R=3, Volumen=',Volcap(3,2),'.')

# Representación del ejemplo
# por ejemplo, con la ecuación cartesiana del toro de eje OZ (https://es.
    wikipedia.org/wiki/Toro_(geometr%C3%ADa))
# y la instrucción implicit_plot3d (https://doc.sagemath.org/html/en/
    reference/plot3d/sage/plot/plot3d/implicit_plot3d.html):
var('z')
implicit_plot3d((R - sqrt(x^2 + y^2))^2 + z^2 - r^2, (x, -R-r, R+r), (y,
    -R-r, R+r), (z,-r,r), color='blue').show()
# o con la biblioteca de funciones de Sage (https://doc.sagemath.org/html
    /en/reference/plot3d/sage/plot/plot3d/shapes.html):
from sage.plot.plot3d.shapes import * # importamos la biblioteca
    correspondiente
Torus(R, r, color='blue').show() # observemos la pequeña imprecisión del
    algoritmo de la biblioteca
```

■

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Parte III

Histórico de exámenes

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

EPP 11.11.2024

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- Debemos resolver como máximo exactamente una opción de cada cuestión, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además Op.A u Op.B (sólo una).

Cuestión 0.ª (Preliminares)

0.A.— En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. (0,3125 ptos. cada uno)

0.B.— Demostremos por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional. (2,5 ptos.)

Cuestión 1.ª (Límites, continuidad)

1.A.— Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x). (2,5 ptos.)

1.B.— Demostremos que si un día, un camión viaja de Cáceres a Badajoz, saliendo a las 7:00, regresando al día siguiente, de Badajoz a Cáceres, saliendo también a las 7:00, yendo ambos viajes por el mismo camino, entonces existe un punto de dicho camino en el que el camión ha estado a la misma hora (instante de tiempo) en ambos viajes. (2,5 ptos.)

Cuestión 2.ª (Derivabilidad)

2.A.— Supongamos que el valor de un texto en bruto fuese el cuadrado de su número de palabras:

a. definamos una función real de variable real que represente esta situación; (0,5 ptos.)
b. discutamos utilizando derivadas cómo habríamos de partir el texto en dos para que los dos textos obtenidos sumen el mínimo valor posible; (1 pto.)
c. ¿cómo habríamos de hacerlo para que sumasen el máximo valor posible?; (0,5 ptos.)
d. ¿qué teorema asegura la existencia de dicho máximo y por qué? (0,5 ptos.)

2.B.— ¿En qué intervalos de números reales podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$? (2,5 ptos.)

Cuestión 3.ª (Integración)

3.A.— Calculemos utilizando franjas horizontales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$. (2,5 ptos.)

3.B.— Calculemos utilizando arandelas horizontales el volumen engendrado, al girar alrededor del eje OY, por la región acotada del plano que queda encerrada entre las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la curva $y = \ln(x + 1)$. (2,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cuestión optativa (SageMath)

Op.A.— Con SageMath:

a. hallemos valores de c para que la función $f(x) = \dfrac{1}{5^x - 1} + c$ sea impar; (0,5 ptos.)

b. representemos gráficamente dicha función para $c = 23$ en el intervalo $[-23, 23]$. (0,5 ptos.)

Op.B.— Con SageMath:

a. hallemos los dos puntos de corte entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 1$; (0,5 ptos.)

b. mostremos en pantalla el mensaje «Los puntos de corte son:» y a continuación ambos puntos de corte en la forma $(x, y(x))$. (0,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

EPS 19.12.2024

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- Debemos resolver como máximo exactamente una opción de cada cuestión, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además Op.A u Op.B (sólo una).

Cuestión 0.ª (Preliminares, límites, continuidad)

Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$: (2,5 ptos.)

0.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 1$ si $(x,y) = (0,0)$.

0.B.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Cuestión 1.ª (Derivabilidad, diferenciabilidad)

a. Hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$; (0,75 ptos.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; (0,75 ptos.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?; (0,25 ptos.)
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?: (0,25 ptos.)

1.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

1.B.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Cuestión 2.ª (Optimización)

2.A.— Hallemos las dimensiones del ortoedro de volumen 64 cm^3 de superficie mínima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f; (1 pto.)
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuáles debiesen ser las dimensiones buscadas. (1 pto.)

2.B.— Hallemos las longitudes de los lados del rectángulo de perímetro dado p de área máxima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

a. definamos la condición/restricción g (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local; (0,75 ptos.)
c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad; (0,25 ptos.)
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas. (1 pto.)

Cuestión 3.ª (Integración)

3.A.— Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo del plano $z = 2$ sobre el conjunto del plano $z = 0$ definido por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x^2, x + y - 2 \leq 0, x - y - 1 \leq 0\}$. (2,5 ptos.)

3.B.— Calculemos por integración triple el volumen del sólido tridimensional acotado, por abajo, por el plano $z = 0$, por encima, por el paraboloide $z = x^2 + 2y$, y por los lados, por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa (Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad, optimización, integración)

a. Estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, (0,5 ptos.) y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$: (0,5 ptos.)

Op.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Op.B.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Versión: D:20261013165558+02'00' ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

EFO 21.1.2025

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección en la parte I pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- De elegir presentarnos a todo deberemos resolver como máximo exactamente una cuestión de cada subparte de cada parte, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además 0,5 ptos. de la cuestión optativa I y 0,5 ptos. de la cuestión optativa II.

PARTE I: modelos en una variable

Subparte I.a

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Representemos en $\mathbb{R}^2$ las esferas de centro $(0,0)$ y radio 1 para las distancias de Manhattan (d_1) y de Chebyshev (d_∞). (2,5 ptos.)

I.0.B.— En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $[0,1/4)$, esto es, del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1/4\}$. (2,5 ptos.)

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x). (2,5 ptos.)

I.1.B.— Sea f la función real de variable real definida por $f(x) = -1$ si $x = 0$ y $f(x) = x$ si $0 < x < 1$; esta función es continua en $(0,1)$ y $f(0)f(1) < 0$, pero $\nexists x \in (0,1)$ tal que $f(x) = 0$, ¿contradice esto el teorema de Bolzano? (2,5 ptos.)

Subparte I.b

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— Utilicemos algún teorema de valores intermedios de derivación (Peano, Cauchy, Lagrange o Rolle) para resolver la siguiente cuestión: «Un coche que circula por una autopista con límite 120 km/h pasa ante dos radares separados 9 km a las 6 h 12 m y a las 6 h 16 m, respectivamente, y ambos miden 105 km/h. ¿Ha incurrido en infracción de tráfico?» (2,5 ptos.)

I.2.B.— Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$ tiene una única solución real. (*Sugerencia*: Pudiésemos usar un corolario del teorema de Rolle relativo al número de raíces de una función y de su derivada, junto al teorema de Bolzano). (2,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Cuestión I.3.ª (Integración)

I.3.A.— Calculemos utilizando franjas verticales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$. (2,5 ptos.)

I.3.B.— Calculemos utilizando capas verticales el volumen generado por el área plana encerrada entre la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ al girar alrededor de dicha recta. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa I

(SageMath)

I.Op.A.— Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-5, 5]$. Con SageMath:

a. representemos en el mismo gráfico la función f (en azul) y sus trasladadas, 3 unidades hacia arriba (en rojo), 3 unidades hacia abajo (en púrpura), 3 unidades hacia la derecha (en naranja) y 3 unidades hacia la izquierda (en verde); (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico la función f (en azul) y sus dilataciones y contracciones: dilatada/alargada verticalmente tres veces (en rojo), contraída/comprimida verticalmente tres veces (en púrpura), dilatada/alargada horizontalmente tres veces (en naranja) y contraída/-comprimida horizontalmente tres veces (en verde). (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$. Con SageMath:

a. hallemos su inversa (llamémosla g); (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico ambas funciones en el intervalo $[-1, 1]$, f en azul y su inversa g en rojo. (0,5 ptos.)

PARTE II: modelos en varias variables

Subparte II.a

Cuestión II.0.ª (Preliminares, límites, continuidad)

II.0.A.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^3 \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. (2,5 ptos.)

II.0.B.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{23x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. (2,5 ptos.)

Cuestión II.1.ª (Derivabilidad, diferenciabilidad)

II.1.A.— Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta} f(0,0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$), (1,3 ptos.) y
b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 0$? (1,2 ptos.)

II.1.B.— Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$; (0,9 ptos.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; (0,9 ptos.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?; (0,25 ptos.)

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? (0,2 ptos.)

Subparte II.b

Cuestión II.2.ª (Optimización)

II.2.A.— Descompongamos 15 en tres sumandos positivos de forma que su producto sea el máximo posible; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f; (1 pto.)
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuál es la descomposición buscada. (1 pto.)

II.2.B.— Calculemos el valor mínimo del paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$ con la condición $2x - 4y + 5 = 0$; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local; (0,75 ptos.)
c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad; (0,25 ptos.)
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas. (1 pto.)

Cuestión II.3.ª (Integración)

II.3.A.— Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo de la superficie $z = xe^{y-x}$ sobre el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre la parábola $y = x - x^2$ y las tangentes a ella en los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$ (esto es, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$, respectivamente). (2,5 ptos.)

II.3.B.— Calculemos por integración triple el volumen de la región $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + 2y + z \leq 6\}$. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa II

(Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad, optimización, integración)

a. Estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, (0,5 ptos.) y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$: (0,5 ptos.)

II.Op.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

II.Op.B.— del campo escalar $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

EFE 22.5.2025

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección en la parte I pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- De elegir presentarnos a todo deberemos resolver como máximo exactamente una cuestión de cada subparte de cada parte, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además 0,5 ptos. de la cuestión optativa I y 0,5 ptos. de la cuestión optativa II.

PARTE I: modelos en una variable

Subparte I.a

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Demostremos por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional. (2,5 ptos.)

I.0.B.— En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $[0, 1/4)$, esto es, del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1/4\}$. (2,5 ptos.)

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x). (2,5 ptos.)

I.1.B.— Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en $[-1, 0]$. (2,5 ptos.)

Subparte I.b

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— Demostremos que si $0 < a < b$, entonces $1 - a/b < \ln(b/a) < b/a - 1$. (2,5 ptos.)

I.2.B.— ¿En qué intervalos de números reales podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$? (2,5 ptos.)

Cuestión I.3.ª (Integración)

I.3.A.— Calculemos por integración, por franjas horizontales, el área del triángulo plano cuyos vértices son $(1, 1)$, $(2, 0)$ y $(3, 2)$. (2,5 ptos.)

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

I.3.B.— Dada la columna generada por revolución de la curva $x = a + \operatorname{sen} y$ $(a > 1)$ alrededor de OY, calculemos el volumen del trozo limitado por dos planos distanciados 2π y perpendiculares a OY (*sugerencia*: por discos horizontales). (2,5 ptos.)

Cuestión optativa I

(SageMath)

I.Op.A.— Con SageMath:

a. hallemos los dos puntos de corte entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 1$; (0,5 ptos.)
b. mostremos en pantalla el mensaje «Los puntos de corte son:» y a continuación ambos puntos de corte en la forma $(x, y(x))$. (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$. Con SageMath:

a. hallemos su inversa (llamémosla g); (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico ambas funciones en el intervalo $[-1, 1]$, f en azul y su inversa g en rojo. (0,5 ptos.)

PARTE II: modelos en varias variables

Subparte II.a

Cuestión II.0.ª (Preliminares, límites, continuidad)

II.0.A.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

II.0.B.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{23x^2y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$. (2,5 ptos.)

Cuestión II.1.ª (Derivabilidad, diferenciabilidad)

II.1.A.— Del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta} f(0, 0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$), (1,3 ptos.) y
b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 0$? (1,2 ptos.)

II.1.B.— Del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0, 0)$; (0,9 ptos.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; (0,9 ptos.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?; (0,25 ptos.)
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? (0,2 ptos.)

Subparte II.b

Cuestión II.2.ª (Optimización)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

II.2.A.— Hallemos las dimensiones del ortoedro de volumen 64 cm^3 de superficie mínima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f; (1 pto.)
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuáles debiesen ser las dimensiones buscadas. (1 pto.)

II.2.B.— Calculemos el valor mínimo del paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$ con la condición $2x - 4y + 5 = 0$; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local; (0,75 ptos.)
c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad; (0,25 ptos.)
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas. (1 pto.)

Cuestión II.3.ª (Integración)

II.3.A.— Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo de la superficie $z = xe^{y-x}$ sobre el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre la parábola $y = x - x^2$ y las tangentes a ella en los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$ (esto es, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$, respectivamente). (2,5 ptos.)

II.3.B.— Calculemos por integración triple el volumen del sólido tridimensional acotado, por abajo, por el plano $z = 0$, por encima, por el paraboloide $z = x^2 + 2y$, y por los lados, por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa II

(Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad, optimización, integración)

a. Estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, (0,5 ptos.) y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$: (0,5 ptos.)

II.Op.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

II.Op.B.— del campo escalar $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Versión: D:20261013165558+02'00' ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

EFE 20.6.2025

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección en la parte I pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- De elegir presentarnos a todo deberemos resolver como máximo exactamente una cuestión de cada subparte de cada parte, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además 0,5 ptos. de la cuestión optativa I y 0,5 ptos. de la cuestión optativa II.

PARTE I: modelos en una variable

Subparte I.a

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Demostremos por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es un número racional. (2,5 ptos.)

I.0.B.— En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $[0, 1/4)$, esto es, del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1/4\}$. (2,5 ptos.)

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x). (2,5 ptos.)

I.1.B.— Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en $[-1, 0]$. (2,5 ptos.)

Subparte I.b

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— Demostremos que si $0 < a < b$, entonces $1 - a/b < \ln(b/a) < b/a - 1$. (2,5 ptos.)

I.2.B.— ¿En qué intervalos de números reales podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$? (2,5 ptos.)

Cuestión I.3.ª (Integración)

I.3.A.— Calculemos por integración, por franjas horizontales, el área del triángulo plano cuyos vértices son $(1, 1)$, $(2, 0)$ y $(3, 2)$. (2,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

I.3.B.— Dada la columna generada por revolución de la curva $x = a + \operatorname{sen} y$ $(a > 1)$ alrededor de OY, calculemos el volumen del trozo limitado por dos planos distanciados 2π y perpendiculares a OY (*sugerencia*: por discos horizontales). (2,5 ptos.)

Cuestión optativa I

(SageMath)

I.Op.A.— Con SageMath:

a. hallemos los dos puntos de corte entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 1$; (0,5 ptos.)
b. mostremos en pantalla el mensaje «Los puntos de corte son:» y a continuación ambos puntos de corte en la forma $(x, y(x))$. (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$. Con SageMath:

a. hallemos su inversa (llamémosla g); (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico ambas funciones en el intervalo $[-1, 1]$, f en azul y su inversa g en rojo. (0,5 ptos.)

PARTE II: modelos en varias variables

Subparte II.a

Cuestión II.0.ª (Preliminares, límites, continuidad)

II.0.A.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

II.0.B.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{23x^2y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$. (2,5 ptos.)

Cuestión II.1.ª (Derivabilidad, diferenciabilidad)

II.1.A.— Del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta} f(0, 0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$), (1,3 ptos.) y
b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 0$? (1,2 ptos.)

II.1.B.— Del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0, 0)$; (0,9 ptos.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; (0,9 ptos.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?; (0,25 ptos.)
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? (0,2 ptos.)

Subparte II.b

Cuestión II.2.ª (Optimización)

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

II.2.A.— Hallemos las dimensiones del ortoedro de volumen 64 cm^3 de superficie mínima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f; (1 pto.)
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuáles debiesen ser las dimensiones buscadas. (1 pto.)

II.2.B.— Calculemos el valor mínimo del paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$ con la condición $2x - 4y + 5 = 0$; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g (0,25 ptos.) y la función objetivo f (0,25 ptos.) que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local; (0,75 ptos.)
c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad; (0,25 ptos.)
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas. (1 pto.)

Cuestión II.3.ª (Integración)

II.3.A.— Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo de la superficie $z = xe^{y-x}$ sobre el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre la parábola $y = x - x^2$ y las tangentes a ella en los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$ (esto es, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$, respectivamente). (2,5 ptos.)

II.3.B.— Calculemos por integración triple el volumen del sólido tridimensional acotado, por abajo, por el plano $z = 0$, por encima, por el paraboloide $z = x^2 + 2y$, y por los lados, por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa II

(Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad, optimización, integración)

a. Estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, (0,5 ptos.) y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$: (0,5 ptos.)

II.Op.A.— del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

II.Op.B.— del campo escalar $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

EPP 10.11.2025

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección pudiese ser: I.0.A, I.1.B, I.2.B, I.3.A, más la optativa I.Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- Debemos resolver como máximo exactamente una opción de cada cuestión, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además I.Op.A o I.Op.B (sólo una).

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Si dos móviles infinitesimales parten del punto medio de la base de un triángulo equilátero con la misma velocidad constante, recorriendo uno la altura (ida y vuelta, otra vez ida y vuelta, y así sucesivamente, sin parar) y el otro el perímetro (una y otra vez, y así sucesivamente, sin parar), ¿coincidirán alguna vez? (2,5 ptos.)

I.0.B.— En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $\left\{23 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. (2,5 ptos.)

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— ¿Para qué números reales r la ecuación $x^3 - 3x + r = 0$ tiene alguna solución en $[-1, 1]$? Se exige que utilicemos el teorema de BOLZANO para resolver esta cuestión. (2,5 ptos.)

I.1.B.— Demostremos utilizando la propiedad de DARBOUX generalizada que si un día, un camión viaja de Cáceres a Badajoz, saliendo a las 7:00, regresando al día siguiente, de Badajoz a Cáceres, saliendo también a las 7:00, yendo ambos viajes por el mismo camino, entonces existe un punto de dicho camino en el que el camión ha estado a la misma hora (instante de tiempo) en ambos viajes. (2,5 ptos.)

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— Demostremos que la ecuación $3x - 5\cos x = 7$ tiene una única solución real. (2,5 ptos.)

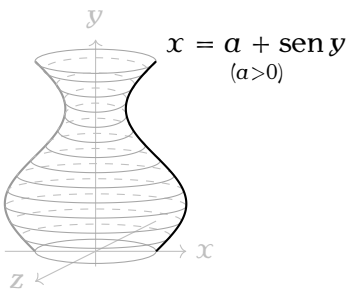
I.2.B.— Tenemos una antigua ventana tapiada en forma de elipse vertical; el eje vertical mide 6 m y el eje horizontal mide 4 m; queremos hacer una ventana rectangular sin picar más allá de lo tapiado; para ello abriremos el máximo hueco rectangular inscrito en dicha elipse; buscamos la máxima luz; ¿cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para maximizar su área y cuál es el valor de tal área máxima? (2,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Cuestión I.3.ª (Integración)

I.3.A.— Siendo el triángulo plano cuyos vértices son (1,1), (2,0) y (3,2), calculemos:

0. las ecuaciones de los lados de dicho triángulo; (0,5 ptos.)
1. el área de dicho triángulo por integración utilizando franjas horizontales; (1 pto.)
2. el área de dicho triángulo por integración utilizando franjas verticales. (1 pto.)



I.3.B.— Calculemos por integración utilizando discos el volumen del sólido generado por la rotación de la curva $x = a + \operatorname{sen} y$ $(a > 0)$ alrededor del eje OY, limitado dicho sólido por dos planos axiales con una distancia de 2π entre ellos. (2,5 ptos.)

Cuestión optativa I (SageMath)

I.Op.A.— Consideremos la función $\operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$. Con SageMath:

a. hallemos su inversa (llamémosla g); (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico ambas funciones en el intervalo $[-1, 1]$, f en azul y su inversa g en rojo. (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Con SageMath:

a. implementemos la función truncamiento en función de la función suelo y la función techo; (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico las tres funciones, en el intervalo $[-5, 5]$, suelo en azul, techo en rojo y truncamiento en verde. (0,5 ptos.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

EPS 18.12.2025

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección pudiese ser: II.0.A, II.1.B, II.2.B, II.3.A, más la optativa II.Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- Debemos resolver como máximo exactamente una opción de cada cuestión, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además II.Op.A o II.Op.B (sólo una).

Cuestión II.0.ª (Preliminares)

II.0.A.— Del campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definido por $\vec{f}(x,y)=(x^2+y^2,\operatorname{sen}(xy),\ln(x+y))$, hallemos su dominio (1,25 ptos.) y su imagen (1,25 ptos.).

II.0.B.— En $(\mathbb{R}^3,d_2)$, hallemos el interior (1,25 ptos.) y la frontera (1,25 ptos.) de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\leq 2,\ 0\leq z\leq 3\}$.

Cuestión II.1.ª (Límites)

II.1.A.— Del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:

a. estudiemos sus límites reiterados en $(0,0)$; (1,25 ptos.)
b. ¿existe su límite en (0,0)? (1,25 ptos.).

II.1.B.— Demostremos que no existe el límite en $(0,0)$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$. (*Sugerencia:* estudiemos diferentes límites direccionales). (2,5 ptos.).

Cuestión II.2.ª (Continuidad)

II.2.A.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=1$ si $(x,y)=(0,0)$. (2,5 ptos.).

II.2.B.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{xye^{x^2/y^2}}{2x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$. (2,5 ptos.).

Cuestión II.3.ª (Derivabilidad)

II.3.A.— Hallemos por definición de derivada direccional la derivada direccional en $(1,1)$ según el vector $(3/5,4/5)$ del campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x,y)=(x^2+y^2,x+y)$. (2,5 ptos.).

II.3.B.— Del campo escalar $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z)=x^3y^2z+xz$:

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

a. estudiemos por definición de derivada parcial si existen sus derivadas parciales en $(1,2,3)$; (2 ptos.)
b. ¿es f derivable en $(1,2,3)$? (0,5 ptos.).

Cuestión optativa II (Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad)

II.Op.A.— Del campo escalar $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z)=\dfrac{3z}{y^2-x^2}$, hallemos su dominio (0,5 ptos.) y su imagen (0,5 ptos.).

II.Op.B.— ¿Es continuo en $(0,0)$ el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $f(x,y)=\dfrac{2x^3+y^2}{x^2+3y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$? (1 pto.)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

EFO 9.1.2026

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección en la parte I pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- De elegir presentarnos a todo deberemos resolver como máximo exactamente una cuestión de cada subparte de cada parte, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además 0,5 ptos. de la cuestión optativa I y 0,5 ptos. de la cuestión optativa II.

PARTE I: modelos en una variable

Subparte I.a

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Demostremos que la función $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ define una distancia en $\mathbb{R}$. (2,5 ptos.).

I.0.B.— En $([0,1), d_2)$, hallemos el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla de $[0, 1/4)$. (2,5 ptos.).

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— Vertemos café caliente en una taza fría. Sean $f(t)$ y $z(t)$ las funciones de temperatura del café y de la taza, respectivamente, ambas continuas. Si inicialmente $f(0) > z(0)$ (café caliente en taza fría) y en un determinado momento m, $f(m) < z(m)$ (la taza absorbió calor del café y adquirió mayor temperatura que éste), demostremos que existe un instante $t \in (0, m)$ en el que la temperatura del café y la temperatura de la taza fue la misma. (2,5 ptos.).

I.1.B.— Utilicemos el teorema del valor intermedio (propiedad de DARBOUX) para demostrar que la función $f(x) = x^4 - 4x$ toma el valor 1 al menos una vez en el intervalo $[1, 2]$. (2,5 ptos.).

Subparte I.b

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— ¿En qué intervalos de $\mathbb{R}$ pudiésemos aplicar el teorema de ROLLE a la función $\dfrac{1+|x|}{1-|x|}$? (2,5 ptos.).

I.2.B.— Demostremos que la ecuación $5x + 3\operatorname{sen} x = 7$ tiene una única solución real. (2,5 ptos.).

Cuestión I.3.ª (Integración)

I.3.A.— Calculemos el área de la región plana encerrada entre la recta $y = x$ y la curva $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. (2,5 ptos.).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel LEÓN ROJAS; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

I.3.B.— Calculemos el volumen del toro generado por $x^2 + y^2 = 4$ al girar alrededor de $x = 3$. (2,5 ptos.).

Cuestión optativa I

(SageMath)

I.Op.A.— Consideremos la función $f : [-2, 2] \longrightarrow [0, 4]$ definida por $f(x) = x^2$. Con SageMath:

a. representemos en un primer gráfico la función f (en azul) y sus trasladadas: 5 unidades hacia arriba (en rojo); 5 unidades hacia la derecha (en naranja); 5 unidades hacia abajo (en púrpura), y 5 unidades hacia la izquierda (en verde); (0,5 ptos.)
b. representemos en un segundo gráfico la función f (en azul) y sus dilataciones y contracciones: dilatada/alargada verticalmente tres veces (en rojo); contraída/comprimida verticalmente tres veces (en púrpura); dilatada/alargada horizontalmente tres veces (en naranja), y contraída/comprimida horizontalmente tres veces (en verde). (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Con SageMath:

a. implementemos la función truncamiento en función de la función suelo y la función techo; (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico las tres funciones, en el intervalo $[-5, 5]$, suelo en azul, techo en rojo y truncamiento en verde. (0,5 ptos.)

PARTE II: modelos en varias variables

Subparte II.a

Cuestión II.0.ª (Preliminares)

II.0.A.— Del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{1 + x}{y}, \sqrt{z}\right)$, hallemos razonadamente su dominio (1,25 ptos.) y su imagen (1,25 ptos.).

II.0.B.— Del conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z^2 \leq 1\}$, hallemos razonadamente su interior (1,25 ptos.) y su frontera (1,25 ptos.)

Cuestión II.1.ª (Límites)

II.1.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = \frac{xy - 2x + y}{x + y}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. estudiemos sus límites reiterados en $(0, 0)$; (1,25 ptos.)
b. ¿existe su límite en (0,0)? (1,25 ptos.).

II.1.B.— Demostremos que no existe el límite en $(0, 0)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$. (*Sugerencia:* estudiemos diferentes límites direccionales). (2,5 ptos.).

Subparte II.b

Cuestión II.2.ª (Continuidad)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

II.2.A.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. (2,5 ptos.).

II.2.B.— Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{23x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. (2,5 ptos.)

Cuestión II.3.ª (Derivabilidad)

II.3.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta} f(0,0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$), (1,3 ptos.) y
b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 0$ orientadas en sentido positivo/directo? (1,2 ptos.)

II.3.B.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$; (1 pto.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; (1 pto.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?; (0,25 ptos.)

Cuestión optativa II

(Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad)

II.Op.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, hallemos su dominio (0,5 ptos.) y su imagen (0,5 ptos.).

II.Op.B.— ¿Es continuo en $(0,0)$ el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$? (0,5 ptos. si nos presentamos a todo; 1 pto. si nos presentamos sólo a la parte segunda).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

EFE 17.6.2026

Tiempo máximo: **120 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos. (+ 1 pto. optativo)**

- En cada cuestión debemos elegir una de las opciones y resolverla justificando la respuesta. (No tenemos por qué elegir siempre la misma opción; un ejemplo de elección en la parte I pudiese ser: 0.A, 1.B, 2.B, 3.A, más la optativa Op.B). Caso de responder a las dos opciones de una misma cuestión sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachada.
- Si usamos resultados teóricos para resolver las cuestiones, recordemos mencionarlos y justificar su uso verificando que se satisfacen las condiciones para que puedan usarse.
- Recordemos **RAZONAR TODA RESPUESTA**.
- La cuestión optativa permite incrementar la puntuación final en un punto hasta un máximo de 10 puntos.
- Este examen debe hacerse sin ayuda: no podemos tener libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes, gafas, pulseras, anillos, minicámaras, auriculares, audífonos, pendientes...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de nosotros.
- De elegir presentarnos a todo deberemos resolver como máximo exactamente una cuestión de cada subparte de cada parte, esto es, un total de cuatro cuestiones, pudiendo resolver además 0,5 ptos. de la cuestión optativa I y 0,5 ptos. de la cuestión optativa II.

PARTE I: modelos en una variable

Subparte I.a

Cuestión I.0.ª (Preliminares)

I.0.A.— Demostremos que la función $d(x,y) = |x^5 - y^5|$ define una distancia en $\mathbb{R}$. (2,5 ptos.).

I.0.B.— En el espacio métrico $(E,d) = ((0,1], d_2)$, el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$:
a. ¿es abierto? (1,25 ptos.); b. ¿es cerrado? (1,25 ptos.).

Cuestión I.1.ª (Límites, continuidad)

I.1.A.— Sean $b(t)$ y $a(t)$ las funciones de temperatura de una barra de metal recién salida de la fragua y del agua en la que se introducirá para enfriarla, ambas continuas respecto del tiempo (t). Si inicialmente $b(0) > a(0)$ (barra caliente y agua fría) y en un determinado momento m, $b(m) < a(m)$ (el agua absorbió calor de la barra y adquirió más temperatura que ésta), demostremos que existe un instante $t \in (0,m)$ en el que la temperatura de la barra y la temperatura del agua fue la misma. (2,5 ptos.).

I.1.B.— Utilicemos el teorema del valor intermedio (propiedad de DARBOUX) para demostrar que la ecuación $\cos x + 2^x = 3$ tiene al menos una solución real en $[1,2]$. (*Datos:* $\cos 1 = 0,540302$; $\cos 2 = -0,416147$). (2,5 ptos.).

Subparte I.b

Cuestión I.2.ª (Derivabilidad)

I.2.A.— ¿Cuántas soluciones reales tiene una ecuación cúbica reducida $x^3 + rx + s = 0$ en la que $r > 0$? (2,5 ptos.).

I.2.B.— Demostremos que la ecuación $5x + 3\operatorname{sen} x = 7$ tiene una única solución real. (2,5 ptos.).

Cuestión I.3.ª (Integración)

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

I.3.A.— Calculemos por franjas horizontales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$. (2,5 ptos.).

I.3.B.— Calculemos con arandelas horizontales el volumen engendrado, al girar alrededor del eje OY, por la región acotada del plano que queda encerrada entre las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la curva $y = \ln(x + 1)$. (2,5 ptos.).

Cuestión optativa I

(SageMath)

I.Op.A.— Consideremos la función $f : [-2, 2] \longrightarrow [0, 4]$ definida por $f(x) = x^2$. Con SageMath, representemos:

a. en un primer gráfico, f (en azul) y sus trasladadas: 5 unidades hacia arriba (en rojo); 5 unidades hacia la derecha (en naranja); 5 unidades hacia abajo (en púrpura), y 5 unidades hacia la izquierda (en verde); (0,5 ptos.)
b. en un segundo gráfico, f (en azul) y sus dilataciones y contracciones: dilatada/alargada verticalmente tres veces (en rojo); contraída/comprimida verticalmente tres veces (en púrpura); dilatada/alargada horizontalmente tres veces (en naranja), y contraída/comprimida horizontalmente tres veces (en verde). (0,5 ptos.)

I.Op.B.— Con SageMath:

a. implementemos la función truncamiento en función de la función suelo y la función techo; (0,5 ptos.)
b. representemos en el mismo gráfico las tres funciones, en el intervalo $[-5, 5]$, suelo en azul, techo en rojo y truncamiento en verde. (0,5 ptos.)

PARTE II: modelos en varias variables

Subparte II.a

Cuestión II.0.ª (Preliminares)

II.0.A.— Del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\vec{f}(x, y) = \left(x^2 + y^2, \operatorname{sen} xy, \ln(x + y)\right)$, hallemos:
a. su dominio; (1,25 ptos.) b. su imagen. (1,25 ptos.).

II.0.B.— Del conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}$, hallemos:
a. su interior; (1,25 ptos.) b. su frontera. (1,25 ptos.).

Cuestión II.1.ª (Límites)

II.1.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = \dfrac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

a. estudiemos sus límites reiterados en $(0, 0)$; (1,25 ptos.)
b. estudiemos su límite en (0,0). (1,25 ptos.).

II.1.B.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$:

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

a. estudiemos sus límites reiterados en $(0,0)$; (1,25 ptos.)
b. estudiemos su límite en (0,0). (1,25 ptos.).

Subparte II.b

Cuestión II.2.ª (Continuidad)

II.2.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 1$ si $(x,y) = (0,0)$, estudiemos su continuidad en $\mathbb{R}^2$. (2,5 ptos.).

II.2.B.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \dfrac{x^3 \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$, estudiemos su continuidad en $\mathbb{R}^2$. (2,5 ptos.).

Cuestión II.3.ª (Derivabilidad)

II.3.A.— Hallemos por definición de derivada direccional la derivada direccional en $(1,1)$ según el vector $(3/5, 4/5)$ del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, x+y)$. (2,5 ptos.).

II.3.B.— Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$; (1 pto.)
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; (1 pto.)
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, (0,25 ptos.) ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?; (0,25 ptos.)

Cuestión optativa II

(Preliminares, límites, continuidad, derivabilidad)

II.Op.A.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z) = \dfrac{3z}{y^2-x^2}$, hallemos:

a. su dominio; (0,5 ptos.) b. su imagen. (0,5 ptos.).

II.Op.B.— Del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, hallemos:

a. su dominio; (0,5 ptos.) b. su imagen. (0,5 ptos.).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Parte IV

Adendas

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

Bibliografía

Esencial

Es muy recomendable el estudio íntegro de los siguientes ocho textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

Abellanas Rapun, Lorenzo, y Galindo Tixaire, Alberto, *Teoría y problemas de métodos de cálculo*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, ISBN: 84-7615-388-0.

Amillo, June, Ballesteros, Francisco, Guadalupe, Rafael, y Martín, Lorenzo J. *Cálculo. Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1996, ISBN: 84-481-0662-8.

Ayres, Frank, y Mendelson, Elliot, *Cálculo diferencial e integral*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, 3.ª ed., ISBN: 84-7615-560-3.

Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Fuertes García, Jesús, y Martínez Hernando, Jesús, *Problemas de cálculo infinitesimal*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1997, ISBN: 84-481-1119-2.

Tomeo Perucha, Venancio, Uña Juárez, Isaías, y San Martín Moreno, Jesús, *Problemas resueltos de cálculo en una variable*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2005, ISBN: 84-9732-289-4.

Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Complementaria

Estos tres volúmenes, de acceso libre, constituyen un maravilloso auxilio para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

Gilbert Strang y Edwin «Jed» Herman, *Cálculo, Volumen 1*, Houston, Texas (US-TX), Estados Unidos: OpenStax (Rice University), 24 de marzo de 2022, ISBN-13: 978-1-951693-51-0, https://openstax.org/details/books/cálculo-volumen-1, Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

Gilbert Strang y Edwin «Jed» Herman, *Cálculo, Volumen 2*, Houston, Texas (US-TX), Estados Unidos: OpenStax (Rice University), 24 de marzo de 2022, ISBN-13: 978-1-951693-52-7, https://openstax.org/details/books/cálculo-volumen-2, Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

Gilbert Strang y Edwin «Jed» Herman, *Cálculo, Volumen 3*, Houston, Texas (US-TX), Estados Unidos: OpenStax (Rice University), 24 de marzo de 2022, ISBN-13: 978-1-951693-53-4, https://openstax.org/details/books/cálculo-volumen-3, Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

De aplicación específica a edificación

Este libro es ilustrativo de la aplicabilidad del cálculo diferencial e integral en una y varias variables en la práctica de la edificación. Supone conocimientos de edificación.

Joaquín Moreno Flores, María José Chávez de Diego, Antonio Garrido Hernández, Miguel Ángel López Guerrero, Yolanda de la Riva Moreno y María del Rosario Rubio San Miguel, *Problemas resueltos de matemáticas para la edificación y otras ingenierías*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Paraninfo, 2011, ISBN-13: 978-84-9732-848-7, https://www.paraninfo.es/catalogo/9788497328487/problemas-resueltos-de-matematicas-para-la-edificacion-y-otras-ingenierias.

Recursos

Programables

Mathics (https://mathics.org/) (implementa una pequeña parte de Wolfram Mathematica <https://www.wolfram.com/mathematica/>).

Maxima (https://maxima.sourceforge.io/es/index.html)[2].

Octave Online (https://octave-online.net/) (implementa una pequeña parte de GNU Octave <https://octave.org/>).

SageMathCell (https://sagecell.sagemath.org/) (implementa una pequeña parte de SageMath <https://www.sagemath.org/>).

Snippets (rdrr.io) (https://rdrr.io/snippets/) (ejecuta R, con más de diecinueve mil paquetes R ya cargados).

No programables

Math24.pro (https://math24.pro/) (cálculo diferencial e integral en una y varias variables, con soluciones paso a paso).

Wolfram|Alpha (https://www.wolframalpha.com/) (verifica resultados y gráficas de cálculo diferencial e integral en una y varias variables).

Comunicación y almacenamiento seguro

Proton, con encriptación de extremo a extremo y datos protegidos en Europa. Al estar registrada en Ginebra (Suiza), Proton cumple con las leyes de privacidad más estrictas de Europa, manteniendo los datos de las personas usuarias dentro de territorio europeo y fuera de jurisdicciones como la Ley PATRIOT Act o FISA de EE. UU. Son servicios principales de Proton: Proton Mail (correo electrónico seguro), Proton Drive (almacenamiento seguro en la nube), Proton Calendar (calendario encriptado), Proton Pass (gestor de contraseñas seguro), Proton VPN (red privada virtual), Proton Meet (videoconferencias cifradas).

Proton (https://proton.me/es-es).

IA

De usar alguna IA, Lumo, el servicio IA de Proton, europea y respetuosa con nuestra privacidad.

Lumo (https://lumo.proton.me/es-es/about).

[2] Estas dos plataformas con Máxima en línea no están funcionales en la actualidad (desconocemos si volverán a estarlo): https://maxima.cesga.es/ y http://www.dma.ufv.br/maxima/.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia ✝ Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

Aula de Humanidades Juanelo Turriano (III.ª edición)

> Y mientras las ciencias y las humanidades no puedan hablar y estar en diálogo y avanzar conjuntamente, creo que vamos a seguir atorados en esta falta de comunicación y no vamos a abordar los problemas más importantes de la ciencia, que se tienen que entender de manera humanística. Y también vamos a perder muchas de las preguntas más interesantes que llegan del contexto científico hacia la filosofía.
>
> (Jimena Canales,
> Ciencias y Humanidades deben avanzar de la mano,
> *Aprendemos juntos:* entrevista con Zuberoa Marcos, 20:36[3]).

Nos sumergimos en las humanidades, disciplinas que debiesen acompañar a toda persona científica o ingeniera, como lo serán aquellas a las que en un principio van destinadas estas notas. En su compañía, *part in itinere, part post hoc*, pues ha de leerse mucho, con quietud, para que deje poso.

Exordio

Su concepción y I.ª edición, inédita, fue fruto del trabajo conjunto con el profesor Andoni Alonso Puelles[4]; en ella nos basamos para construir una II.ª edición que residió en un proyecto de escuela activa[5], apoyo mutuo[6] y aprendizaje libre[7] sobre matemática discreta y numérica en la Wikipedia[8], y en ambas para la presente III.ª edición, pensando decididamente en que contribuya a avivar las conciencias ética y social del alumnado hasta empaparse de ellas.

El Aula de Humanidades Juanelo Turriano [9] no tuvo ni tiene el propósito de ofrecer una visión general de las humanidades sino de incidir en temas comunes, como el uso y el impacto

[3] *Vid.* https://aprendemosjuntos.bbva.com/especial/ciencias-y-humanidades-deben-avanzar-de-la-mano-jimena-canales/.

[4] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Andoni_Alonso_Puelles.

[5] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Escuela_activa

[6] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Apoyo_mutuo

[7] Libre en el sentido de Freedomdefined (http://freedomdefined.org/Definition/Es) y en el de *Free Learning* (https://books.google.es/books?id=uiVGEAAAQBAJ).

[8] *Vid.* https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Proyecto_educativo/Matemática_discreta_y_numérica.

[9] Juanelo Turriano (Giovanni Torriani o Giannello della Torre) nace en Cremona hacia el 1501 y muere en Toledo el 13 de junio de 1585. En 1529, Carlos V le nombró relojero real (imperial), asignándole un sueldo de 200 ducados anuales, trabajos extraordinarios aparte. En esta tarea de relojero real destaca como obra cumbre un reloj planetario o astrario, capaz, además de dar las horas y los minutos, de describir las revoluciones de los planetas, con todas sus diferencias, las horas de sol, las horas de luna, aparición de los signos zodiacales …, superando al astrario de De Dondi (1318-1389), la obra maestra hasta ese momento. Según nos relata Ambrosio de Morales, tardó veinte años en concebirlo y tres años y medio en hacerlo. Hizo una réplica de esta máquina, con todas las paredes de cristal, de forma que el «misterio» de su funcionamiento quedase al descubierto. Es conocida como «el cristalino». Sus ayudantes en estas tareas eran Jean Vallin, relojero de renombre en Flandes, y Jorge de Diana. También colaboraba con él Juan de Seroyas, relojero y cerrajero de la Corte desde 1561. Ambos construyeron un reloj para el Monasterio del Escorial, que se instaló en 1563.

Tras morir Carlos V en 1558, aceptó permanecer al servicio de su hijo Felipe II. Parece ser que pidió aumento de sueldo, que le concedió el rey mediante Cédula Real de 26 de julio de 1562, donde figura el doble de sueldo, aunque también el compromiso de residir en la corte y no hacer más obras que las ordenadas por el rey (pagadas aparte del sueldo).

En su faceta de ingeniero, su obra más famosa, fue una máquina de canjilones en planos inclinados para abastecer de agua del Tajo a Toledo, situada a unos 100 metros sobre el río. Esta máquina es conocida como «el artificio de Juanelo» y es descrita por Ambrosio de Morales, cronista de Felipe II.

El marqués del Vasto le comunica esta empresa en 1565, firmando Turriano ese mismo año una escritura con los representantes de Toledo por la que se compromete a construir un artificio que permita resolver el problema del abastecimiento de agua a la ciudad, hasta esa fecha resuelto a base de subir odres con personas y jumentos. La escritura recogía el compromiso de los representantes de Toledo de pagar la obra con 8000 ducados de oro más una pensión vitalicia de 1900, quince días después de su finalización.

Consiguió de Felipe II dispensa de no tener que residir en la corte. En 1568 concluyó la construcción del artificio. Éste, que comenzó su funcionamiento el 25 de febrero de 1569, era capaz de subir 17 000 litros diarios —casi 5000 más de lo estipulado que eran «mil seiscientos cántaros de cuatro azumbres»— desde un lugar cercano al puente

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

recíproco de la ciencia y la tecnología en la sociedad desde el punto de vista humanístico (sin menoscabo del fomento de la lectura y de la interdisciplinariedad subyacentes), esto es, *la convivencialidad de las Humanidades, la Ciencia, la Tecnología, la Sociedad, la Naturaleza y la Innovación*, de modo que la persona científica o ingeniera conozca las demandas y repercusiones éticas y sociales de sus quehaceres, a la vez que disfrute y aprenda del encuentro con las personas autoras de dichas reflexiones y acciones.

Los libros cuya lectura se propone se han clasificado en seis bloques temáticos. Esta estructura permite que la lectura y reflexión sobre cada bloque se lleve a cabo, relajada, que no distraídamente, durante aproximadamente un año. A renglón seguido del último bloque se propone la lectura de algunos más. Tras la lectura de cada libro, quizás no estaría de más que la persona interesada elabore un pequeño resumen del mismo y análisis critico y que busque fuentes documentales con las que contrastar sus conclusiones, a modo de toma de conciencia de lo leído y reflexionado. Asimismo, tras terminar todo un bloque, pudiese hacer algo similar sobre el conjunto.

Existen sesudas selecciones que complementan ésta, como la de Jordi Llovet i Pomar —*La literatura admirable. Del Génesis a Lolita*, 2018— o la de Nuccio Ordine —*Classici per la vita. Una piccola biblioteca ideale*, 2016 (*Clásicos para la vida. Una pequeña biblioteca ideal*, 2017)—. En ningún caso debiese quedar restringido el ámbito a los temas mencionados, pues desde el convencimiento de que el estudio de las humanidades es esencial para entender el mundo, pudiese trabajarse cualquiera de las disciplinas humanísticas.

Tras el encuentro con la persona autora a través de la obra propuesta, no ha de olvidarse explorar, lo más posible, el resto de su obra, para así obtener una visión en conjunto de su pensamiento.

Además del enriquecimiento personal, cultural y humanístico, que conlleva lo anterior, se invita a *compartir lo aprendido y meditado*,

- *contribuyendo a iniciativas del conocimiento libre como Wikipedia* —quizás también en sus wikiproyectos[10]—, Wikilibros, Wikiversidad o cualquiera de los otros proyectos de la fundación Wikimedia; por poner solo un ejemplo, si a fecha de publicación de esta revisión aún no existiese ningún artículo en la Wikipedia en español sobre la obra *El universo abierto*

de Alcántara hasta el Alcázar. Los representantes de Toledo decidieron no pagarle, argumentando que el agua sólo abastecía el real Alcázar. Turriano había adelantado más de 8 millones de maravedises, por lo que acudió al rey. En 1573, Felipe II publicó una cédula para arbitrar el conflicto. Los representantes de la ciudad opinaban que el rey pagase a Turriano los 8 millones, que Toledo le pagase 6000 ducados, que Turriano construyese un segundo artificio para abastecer la ciudad y que el agua que ésta rindiese fuese propiedad de Turriano. En 1581 terminó el segundo artificio. Pero Toledo tampoco le pagó. Murió arruinado el 13 de junio de 1585. Su nieto se ocupó entonces de mantener los dos artificios hasta su muerte en 1597. A partir de ahí, ambos artificios comenzaron a fallar, hasta que dejaron de funcionar en 1639.

Como dato curioso decir que las columnas del artificio se extrajeron de una de las canteras de granito de Orgaz: «se encuentra la de donde se sacaron los magníficos postes llamados de Juanelo, porque este grande hombre los movía y conducía a Toledo, sin otro auxilio que el de una hija suya, á pesar de que son unas columnas de 75 pies de largo y 5 de diámetro» (Diccionario de Madoz). Cuatro de estas columnas, de 11,50 m de alto por 1,50 m de diámetro, que permanecían en la cantera, fueron trasladadas al Valle de Cuelgamuros (Madrid), durante la construcción del Valle de los Caídos, y allí permanecen.

También se le atribuyen ciertos autómatas: pájaros que podían volar, soldados que simulaban batallas, figuras religiosas con diversos movimientos. Muy famoso fue su «hombre de palo», un muñeco de madera con movilidad propia, del que se dice que era capaz de salir todos los días a la calle, andar hasta el palacio arzobispal y recoger la comida. Debido a ello la calle donde vivió Turriano se conoce como calle del hombre de palo.
Por encargo de Felipe II, escribió *Los veinte y un libros de los ingenios y máquinas de Juanelo*. Algunos historiadores afirman que el pantano de Tibi, atribuido a Herrera, puede haber sido también obra suya.

Además, Turriano era matemático y astrónomo. Por ejemplo, colaboró con Gregorio XIII en la reforma del calendario juliano.

[10] *Vid.* https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Wikiproyectos.

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

de Popper (aunque sí que existen sobre *La sociedad abierta y sus enemigos*[11] y sobre *La lógica de la investigación científica* [12]), su lectura y reflexión y la de, por ejemplo, el ensayo del profesor Jorge Estrella, *El universo abierto de Karl Popper* (que aporta una visión global sobre la filosofía de Popper), podrían servir de base para elaborar dicho artículo;
- *promoviendo encuentros*, presenciales o en línea, para el debate y la discusión, de asistencia y participación libre y gratuita, sobre estos temas.

A continuación, la relación de libros, clasificados por bloques temáticos. Si bien para su lectura pudiese seguirse el orden en que figuran, lo cierto es que la libertad de seguirlo o no, ofrece la flexibilidad, el atractivo y la variedad del encuentro casual. Las indicaciones [∗] designan los pertenecientes a la 1.ª edición del Aula.

A modo de prólogo

Permítaseme el atrevimiento casi irreverente de recomendar la lectura de la sección

- «Cooperar es progresar» (págs. 59ss.) de mi artículo «El museo y las arquitecturas de conocimiento libre», *Museos.es*, 7-8: 44–65, 2012 (doi:10.4438/2387-0958-MU-2011-2012-7-8-22) (CC BY 3.0)[13].

La transversalidad del conocimiento libre y de la actividad museística como conservadores coadyuvantes del patrimonio humanístico, científico, tecnológico y social me lleva a ello. En este artículo también se discuten las iniciativas WLA y GLAM-Wiki de la Fundación Wikimedia (*vid.* «Ideas de difusión», págs. 50ss.) —más sobre estas iniciativas en Outreach de Wikimedia (https://outreach.wikimedia.org/wiki/GLAM/References#With_reference_to_Wikipedia,_Wikimedia_Commons _or_other_Wikimedia_projects).

A modo de ejemplo

Quizás el más antiguo conocido de tecnología compleja hasta la fecha:

- el mecanismo de Anticitera[14]

(puede verse también, en inglés: *Unlocking the secrets of the world's oldest computer*[15] —Harriet Constable, 15.07.2021—).

CERO: Filosofía de la Técnica y de la Tecnología

- Juan David García Bacca, *Elogio de la técnica*, 1968.
- Lewis Mumford, *Técnica y civilización* (*Technics and Civilization*, 1934), <https://es.wikipedia.org/wiki/Técnica_y_civilización> (reseña).
- Albert Borgmann, *Technology and the Character of Contemporary Life: A Philosophical Inquiry*, 1984, <https://en.wikipedia.org/wiki/Technology_and_the_Character_of_Contemporary_Life:_A_Philosophical_Inquiry> (reseña).
- Carl Mitcham, *¿Qué es la filosofía de la tecnología?*, 1989. [∗]
- Langdon Winner, *La ballena y el reactor: una búsqueda de los límites en la era de la alta tecnología* (*The Whale and the Reactor: A Search for Limits in an Age of High Technology*, 1986).
- Alvin Toefler, *La tercera ola* (*The Third Wave*, 1980), <https://es.wikipedia.org/wiki/La_tercera_ola> (reseña).

[11] *Vid.* https://es.wikipedia.org/wiki/La_sociedad_abierta_y_sus_enemigos.
[12] *Vid.* https://es.wikipedia.org/wiki/La_lógica_de_la_investigación_científica.
[13] *Vid.* https://archive.org/details/LEONROJASJ.M.ElMuseoYLasArquitecturasDeConocimientoLibreMuseos.es2012SEPARATACCBY.
[14] *Vid. v. gr.* https://es.wikipedia.org/wiki/Mecanismo_de_Anticitera.
[15] *Vid.* https://www.bbc.com/reel/video/p09pcwnz/unlocking-the-secrets-of-the-world-s-oldest-computer.

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

- Jacques Ellul, *La sociedad tecnológica* (*The Technological Society*, 1954) (en Zenon Pylyshyn, *Perspectivas de la revolución de los computadores* [*Perspectives on the computer revolution*, 1970]).
- Jürgen Habermas, *Ciencia y técnica como ideología* (*Technik und Wissenschaft als "Ideologie"*, 1968).
- Jean Baudrillard, *El sistema de los objetos* (*Le Système des objets*, 1968), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_sistema_de_los_objetos> (reseña).
- Gilbert Simondon, *El modo de existencia de los objetos técnicos* (*Du mode d'existence des objets techniques*, 1958), <https://fr.wikipedia.org/wiki/Du_mode_d'existence_des_objets_techniques> (reseña), , <http://www.academia.edu/4184556/Gilbert_Simondon_On_the_Mode_of_Existence_of_Technical_Objects> (texto).
- Herbert Alexander Simon, *Las ciencias de lo artificial* (*The Sciences of the Artificial*, 1969), <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Sciences_of_the_Artificial> (reseña).
- Jeremy Riekin, *El siglo de la biotecnología: el comercio genético y el nacimiento de un mundo feliz* (*The Biotech Century: Harnessing the Gene and Remaking the World*, 1998).
- Ursula Franklin, *El mundo real de la tecnología* (*The Real World of Technology*, 1992).
- Shannon Vallor, *Technology and the Virtues: A Philosophical Guide to a Future Worth Wanting*, 2018.

UNO: Ciencia, Tecnología y Sociedad

- Guy Debord, *La sociedad del espectáculo* (*La société du spectacle*, 1967), <https://es.wikipedia.org/wiki/La_sociedad_del_espectáculo> (reseña).
- Jorge Luis Borges, *La biblioteca de Babel* (en *Ficciones*, 1944), <https://es.wikipedia.org/wiki/La_biblioteca_de_Babel> (reseña).
- Javier Echeverría, *Introducción a la metodología de la ciencia: la Filosofía de la Ciencia en el siglo XX*, 1989. [∗]
- Andrew Feenberg, *Transformar la tecnología. Una nueva visita a la teoría crítica* (*Transforming Technology: A Critical Theory Revisited*, 2002).
- Karl Popper, *El universo abierto. Una discusión a favor del indeterminismo* (*The Open Universe: An Argument for Indeterminism*, 1956–57 como galeradas inéditas, 1982 como libro). [∗]
- Thomas Kuhn, *¿Qué son las revoluciones científicas? y otros ensayos* (1989) (*What are scientific revolutions?*, 1981; *Commensurabillity, comparability, communicability*, 1982; *Rationality and theory choice*, 1983). [∗]
- Simone Weil, *Sobre la ciencia* (*Sur la science*, 1966).
- Charles Fort, *El libro de los condenados* (*The Book of the Damned*, 1919), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_libro_de_los_condenados> (reseña), <https://es.wikisource.org/wiki/en:The_Book_of_the_Damned> (texto).
- Zygmunt Bauman, *Comunidad. En busca de seguridad en un mundo hostil* (*Community. Seeking Safety in an Insecure World*, 2001).
- Cathy O'Neil, *Armas de destrucción matemática: cómo el big data aumenta la desigualdad y amenaza la democracia* (2017) (*Weapons of Math Destruction. How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy*, 2016), <https://es.wikipedia.org/wiki/Armas_de_destrucción_matemática> (reseña).
- Nuccio Ordine, *La utilidad de lo inútil* (*L'utilità dell'inutile*, 2013).
- Donald A. Norman, *El diseño de los objetos del futuro. La interacción entre el hombre y la máquina* (*The design of future things*, 2007).
- Kevin Kelly, *Lo inevitable* (*The Inevitable*, 2016), <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Inevitable_(book)> (reseña).
- Donna Haraway, *Un manifiesto cíborg* (*A Cyborg Manifesto*, 1985),

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

<https://es.wikipedia.org/wiki/El_Manifiesto_Cyborg> (reseña).

DOS: Imagen del Ser Humano

- José Ortega y Gasset, *La rebelión de las masas*, 1930, <https://es.wikipedia.org/wiki/La_rebelión_de_las_masas> (reseña).
- —, *Meditación de la técnica*, 1939.
- George H. Mead, *Espíritu, persona y sociedad* (*Mind, Self and Society*, 1934, <https://en.wikipedia.org/wiki/Mind,_Self_and_Society> (reseña).
- John R. Searle, *El misterio de la conciencia* (*The Mystery of Conciousness*, 1997). [∗]
- Roger Penrose, *Las sombras de la mente: hacia una comprensión científica de la consciencia* (*Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*, 1994), <https://es.wikipedia.org/wiki/Las_sombras_de_la_mente> (reseña). [∗]
- Alan Ross Anderson (*ed.*), *Controversia sobre mentes y máquinas* (*Minds and Machines*, 1964). [∗]
- Bart Kosko, *Pensamiento borroso. La nueva ciencia de la lógica borrosa* (*Fuzzy Thinking. The New Science of Fuzzy Logic*, 1993). [∗]
- Paul Virilio, *El cibermundo, la política de lo peor: entrevista con Philippe Petit* (*Cybermonde, la politique du pire : entretien avec Philippe Petit*, 1996).
- Edward Ashford Lee, *Plato and the Nerd: The Creative Partnership of Humans and Technology*, 2017.
- Adam Smith, *Teoría de los sentimientos morales* (*The Theory of Moral Sentiments*, 1759), <https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_los_sentimientos_morales> (reseña), <https://en.wikipedia.org/wiki/s:The_Theory_of_Moral_Sentiments> (texto).
- Hannah Arendt, *La condición humana* (*The Human Condition*, 1958), <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Human_Condition_(book)> (reseña). [∗]
- Simone de Beauvoir, *El segundo sexo* (*Le Deuxième Sexe*, 1949), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_segundo_sexo> (reseña).
- Luce Irigaray, *Espéculo de la otra mujer* (*Speculum. De l'autre femme*, 1974).
- Luc Ferry, *Aprender a vivir: Filosofía para mentes jóvenes* (*Apprendre à vivre : Traité de philosophie à l'usage des jeunes générations*, 2006).

TRES: Multiculturalismo y Globalización

- Iván Illich, *La Convivencialidad* (*Tools for Conviviality*, 1973), <https://en.wikipedia.org/wiki/Tools_for_Conviviality> (reseña). [∗]
- Peter Sloterdijk, *Normas para el parque humano. Una respuesta a la Carta sobre el humanismo de Heidegger* (*Regeln für den Menschenpark. Ein Antwortschreiben zu Heideggers Brief über den Humanismus*, 1999). [∗]
- Hans Küng, *Una ética mundial para la economía y la política* (*Weltethos fur Weltpolitik und Weltwirtschaft*, 1997). [∗]
- Robert Nozick, *Anarquía, Estado y utopía* (*Anarchy, State, and Utopia*, 1974), <https://es.wikipedia.org/wiki/Anarquía,_Estado_y_utopía> (reseña).
- Donaldo Macedo, Bessie Dendrinos y Panayota Gounari, *Lengua, ideología y poder. La hegemonía del inglés* (*The Hegemony of English*, 2003).
- William Foote Whyte, *La sociedad de las esquinas* (*Street Corner Society*, 1943), <https://en.wikipedia.org/wiki/Street_Corner_Society> (reseña).
- Jorge Riechmann, *Un mundo vulnerable. Ensayos sobre ecología, ética y tecnociencia* (2000). [∗]
- Edgar Morin, *La vía. Para el futuro de la humanidad* (*La Voie. Pour l'avenir de l'humanité*, 2011).
- Christian Laval y Pierre Dardot, *La nueva razón del mundo. Ensayo sobre la sociedad*

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

neoliberal (*La nouvelle raison du monde*, 2009).
- —, *Común. Ensayo sobre la revolución en el siglo XXI* (*Commun, Essai sur la révolution au XXIe siècle*, 2014).
- Serge Latouche, *La apuesta por el decrecimiento: ¿cómo salir del imaginario dominante?* (*Le pari de la décroissance*, 2006).
- Paul Bloom, *Contra la empatía: argumentos para una compasión racional* (*Against empathy: The case for rational compassion*, 2016).
- Michel Onfray, *Política del rebelde. Tratado de la resistencia y la insumisión* (*Politique du rebelle : Traité de résistance et d'insoumission*, 1997).
- Lawrence G. Lovasik, *El poder oculto de la amabilidad* (*The Hidden Power of Kindness: A Practical Handbook for Souls Who Dare to Transform the World, One Deed at a Time*, 1962).

CUATRO: Ética y Valor Humano

- Francisco Díez de Velasco Abellán, *Hombres, ritos, Dioses. Introducción a la historia de las religiones*, 1995. [*]
- Jean-Jacques Rousseau, *El contrato social; o los principios del derecho político* (*Du contrat social; ou Principes du droit politique*, 1762), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_contrato_social> (reseña). [*]
- Martin Heidegger, *La pregunta por la técnica* (*Die Frage nach der Technik*, 1954), <https://revistafilosofia.uchile.cl/index.php/RDF/article/view/45002> (texto). [*]
- Max Weber, *La ética protestante y el espíritu del capitalismo* (*Die protestantische Ethik und der 'Geist' des Kapitalismus*, 1904–1905), <https://es.wikipedia.org/wiki/La_ética_protestante_y_el_espíritu_del_capitalismo> (reseña). [*]
- Ayn Rand, *La rebelión de Atlas* (*Atlas Shrugged*, 1957), <https://es.wikipedia.org/wiki/La_rebelión_de_Atlas> (reseña).
- Joseph Conrad, *El corazón de las tinieblas* (*Heart of Darkness*, 1899), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_corazón_de_las_tinieblas> (reseña). [*]
- Cesare Beccaria, *De los delitos y las penas* (*Dei delitti e delle pene*, 1764), <https://es.wikipedia.org/wiki/De_los_delitos_y_las_penas> (reseña).
- Christian Laval, *La escuela no es una empresa: el ataque neoliberal a la enseñanza pública* (*L'école n'est pas une entreprise: Le néo-libéralisme à l'assaut de l'enseignement public*, 2003).
- Martha Nussbaum, *Sin fines de lucro: por qué la democracia necesita de las humanidades* (*Not for profit: why democracy needs the humanities*, 2010).
- Sigmund Freud, *El malestar en la cultura* (*Das Unbehagen in der Kultur*, 1930), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_malestar_en_la_cultura> (reseña). [*]
- Lev Tolstoi, *Confesión* (*Ispoved*, 1884), <https://en.wikipedia.org/wiki/A_Confession> (reseña), <https://en.wikipedia.org/wiki/s:A_Confession_(Tolstoy)> (texto).
- Francis Collins, *¿Cómo habla Dios? La evidencia científica de la fe* (*The Language of God: A Scientist Presents Evidence for Belief*, 2006), <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Language_of_God> (reseña).
- John Stuart Mill, *Sobre la libertad* (*On liberty*, 1859), <https://es.wikipedia.org/wiki/Sobre_la_libertad> (reseña).
- Frédéric Gros, *Desobedecer* (*Désobéir*, París: Albin Michel, 2017).

CINCO: Evolución

- George Orwell, *1984* (*Nineteen eighty-four*, 1949), <https://es.wikipedia.org/wiki/1984_(novela)> (reseña).

 ©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/

- Aldous Huxley, *Un mundo feliz* (*Brave New World*, 1932), <https://es.wikipedia.org/wiki/Un_mundo_feliz> (reseña).
- —, *Nueva visita a un mundo feliz* (*Brave New World Revisited*, 1958), <https://es.wikipedia.org/wiki/Nueva_visita_a_un_mundo_feliz> (reseña).
- Daniel Dennett, *La peligrosa idea de Darwin: la evolución y los significados de la vida* (*Darwin's Dangerous Idea: Evolution and the Meanings of Life*, 1996), <https://en.wikipedia.org/wiki/Darwin's_Dangerous_Idea> (reseña). [*]
- George Bassalla, *La evolución de la tecnología* (*The Evolution of Technology*, 1988). [*]
- Paul Feyerabend, *Contra el método: esquema de una teoría anarquista del conocimiento* (*Against Method: Outline of an Anarchist Theory of Knowledge*, 1970/1975), <https://es.wikipedia.org/wiki/Contra_el_método> (reseña), <http://mcps.umn.edu/philosophy/completeVol4.html> (texto). [*]
- Hans Jonas, *El principio de responsabilidad* (*Das Prinzip Verantwortung*, 1979), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_principio_de_responsabilidad> (reseña). [*]
- Herman Melville, *Moby Dick; o La Ballena* (*Moby-Dick; or, The Whale*, 1851), <https://es.wikipedia.org/wiki/Moby-Dick> (reseña).
- Yuval Noah Harari, *Sapiens: De animales a dioses: Una breve historia de la humanidad* (*Sapiens: A Brief History of Humankind*, 2014), <https://es.wikipedia.org/wiki/Sapiens:_De_animales_a_dioses> (reseña).
- —, *Homo Deus: Breve historia del mañana* (*Homo Deus: A Brief History of Tomorrow*, 2016), <https://es.wikipedia.org/wiki/Homo_Deus:_Breve_historia_del_mañana> (reseña).
- Hernán Zin, *La libertad del compromiso: cambiar tu vida para cambiar el mundo* (2005).
- Paola Cavalieri y Peter Singer, *El Proyecto «Gran Simio»: la igualdad más allá de la humanidad* (*The Great Ape Project: Equality Beyond Humanity*, 1993). [*]
- Steven M. Wise, *Sacudiendo la jaula: Hacia los Derechos de los animales* (*Rattling the Cage: Toward Legal Rights for Animals*, 2000), <https://lawcommons.lclark.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1387&context=alr> (reseña), <https://atlasofthefuture.org/es/project/nonhuman-rights-project/> (*Nonhuman Rights Project*).
- Samuel Butler, *Erewhon, un mundo sin máquinas* (*Erewhon: or, Over the Range*, 1872), <https://en.wikipedia.org/wiki/Erewhon> (reseña), <http://nzetc.victoria.ac.nz/tm/scholarly/tei-ButErew.html> (texto). [*]

A continuación

- Baruch Spinoza, *Ética* (*Ethica ordine geometrico demonstrata*, 1677), <https://es.wikipedia.org/wiki/Ética_(Spinoza)> (reseña), <https://es.wikisource.org/wiki/en:Ethics_(Spinoza)> (texto).
- Thomas Hobbes, *Leviatán, o La materia, forma y poder de una república eclesiástica y civil* (*Leviathan, or The Matter, Forme and Power of a Common-Wealth Ecclesiasticall and Civil*, 1651), <https://es.wikipedia.org/wiki/Leviatán_(Hobbes)> (reseña), <https://es.wikisource.org/wiki/en:Leviathan> (texto).
- Arthur Schopenhauer, *El mundo como voluntad y representación* (*Die Welt als Wille und Vorstellung*, 1819), <https://es.wikipedia.org/wiki/El_mundo_como_voluntad_y_representación> (reseña).

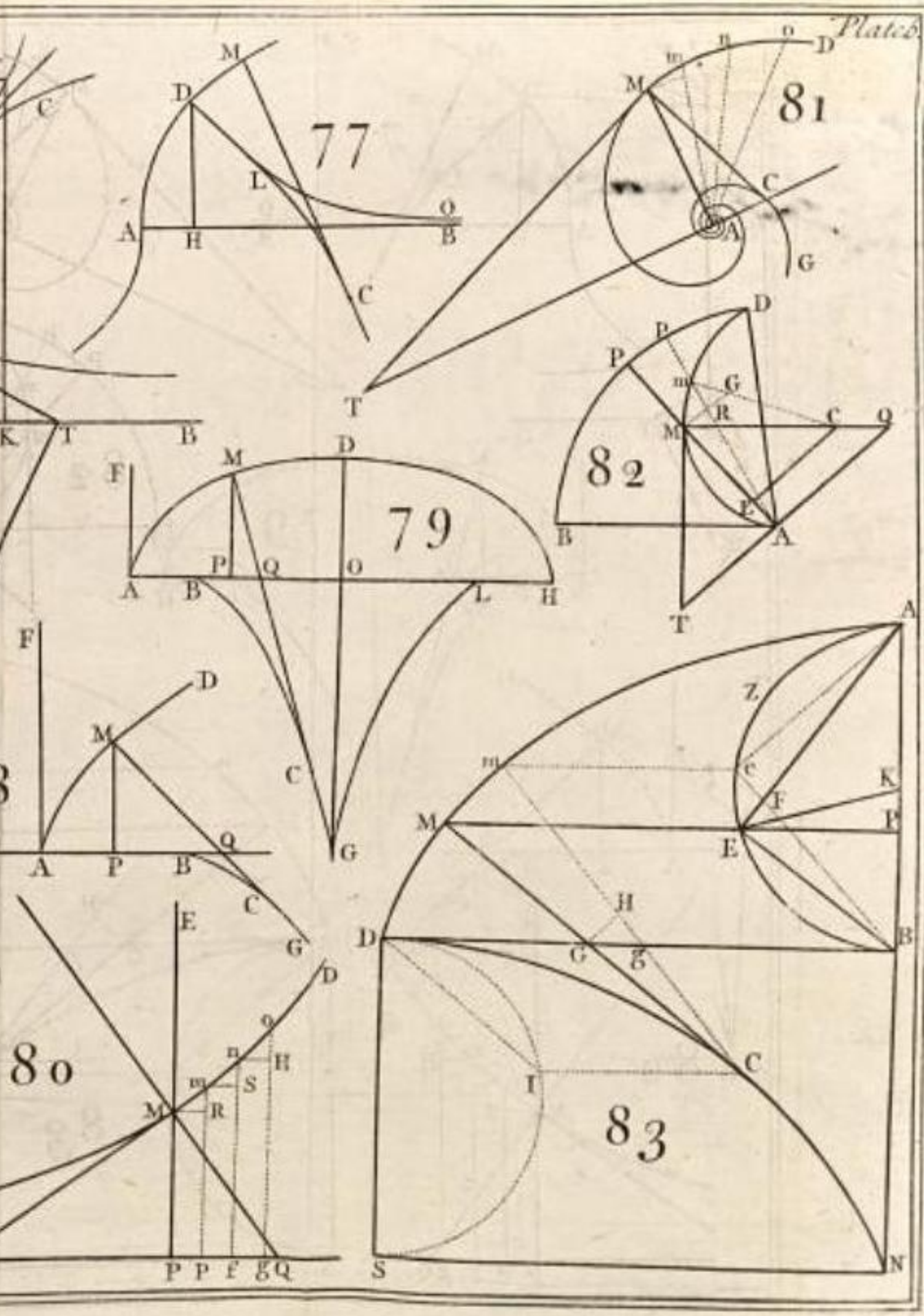
Para no finalizar

- Merritt Roe Smith y Leo Marx (eds.), *Does Technology Drive History. The Dilemma of Technological Determinism*, 1994, <https://muse.jhu.edu/article/33258> (reseña).
- Henry Petroski, *La ingeniería es humana. La importancia del fallo en el éxito del diseño*, 2007, <https://www.cinter.es/laingenieriaeshumana_prologo.htm> (fragmentos del prólogo).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/ Versión: D:20261013165558+02'00'

- Jesús Pedro Zamora Bonilla, *Sacando consecuencias: una filosofía para el siglo XXI*, 2017, <https://revistas.usc.gal/index.php/agora/article/view/5021/5436> (reseña).
- Antonio Diéguez Lucena, *Pensar la tecnología. Una guía para comprender filosóficamente el desarrollo tecnológico actual*, 2024, <https://www.jotdown.es/2025/08/antonio-dieguez-entrevista/> (entrevista).

©2026, prof. dr. Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30), http://gratuidadcristiana.blogspot.com/


77
81
82
79
80
83
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
Z